Devoir maison 3

Pour le lundi 17 novembre 2025

Exercice 1.

On dispose de deux pièces : l'une est équilibrée (la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{1}{2}$) et l'autre est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est $p \in [0, 1]$.

On effectue une suite de lancers de la façon suivante :

- Le premier lancer est effectué avec la pièce équilibrée.
- Ensuite, pour chacun des lancers suivants, on choisit ainsi la pièce :
  - si le résultat précédent est Pile, on conserve la même pièce pour le lancer suivant,
  - si le résultat précédent est Face, on prend l'autre pièce pour le lancer suivant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- T_n l'événement «utiliser la pièce truquée pour le n-ième lancer»,
- E_n l'événement «utiliser la pièce équilibrée pour le n-ième lancer»,
- P_n l'événement «obtenir Pile au n-ième lancer»,
- F_n l'événement «obtenir Face au n-ième lancer».

Les deux premiers lancers.

1. Déterminer la probabilité que le deuxième lancer se fasse avec la pièce équilibrée.
2. On a obtenu Pile au deuxième lancer. Calculer la probabilité que ce soit avec la pièce truquée.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un Pile lors des deux premiers lancers.
4. Calculer la probabilité d'obtenir le premier Face au deuxième lancer.

Une relation de récurrence.

5. Exprimer $\mathrm{P}(E_{n+1})$ en fonction de $\mathrm{P}(E_n)$, pour tout $n \geqslant 1$.
6. En déduire la valeur de $\mathrm{P}(E_n)$ en fontion de $n \geqslant 1$.

Le premier Pile et le premier Face.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement «le premier Pile est obtenu lors du n-ième lancer» et B_n l'événement «le premier Face est obtenu lors du n-ième lancer».

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de B_n.
8. Calculer les probabilités de $A_1,\ A_2,\ A_3$ et A_4.
9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité $\mathrm{P}(A_{2n})$, et pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité $\mathrm{P}(A_{2n+1})$.

Exercice 2. (NE PAS RENDRE)

Une urne contient 1 boule noire et $n-1$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. (a) Quel est le nombre de tirages effectués lors de cette épreuve ?
   (b) Pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules dans l'urne juste avant le $(2j-1)$-ième tirage ? Combien en reste-t-il juste avant le $(2j+1)$-ième tirage ? Combien en reste-t-il juste avant le $(2j)$-ième tirage ?
2. On désigne par B_k l'événement «le k-ième tirage donne une boule blanche» et N_k l'événement «le k-ième tirage donne une boule noire».
   (a) Calculer $\mathrm{P}(N_1)$ et $\mathrm{P}(N_2)$.
   (b) Pour tout entier naturel $j \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $\mathrm{P}(N_{2j+1})$ et $\mathrm{P}(N_{2j})$.
3. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note U_j l'événement «on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j+1)$-ième tirage".
   (a) En considérant l'état de l'urne juste avant le $(2n-2)$-ième tirage, montrer que $\mathrm{P}(U_{n-1}) = 0$.
   (b) Montrer que : $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{P}(U_j) = \dfrac{n-1-j}{n(n-1)}$.
   (c) Ecrire l'événement A «on obtient une seule boule noire lors de cette épreuve» à l'aide des événements U_j.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(A)$.