Devoir surveillé 3

Samedi 8 novembre 2025

Durée : 3h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

Le sujet comporte 2 page(s).

Exercice 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, appelé le nombre de Catalan d'ordre n.

1. Calculer les réels c_0, c_1 et c_2.
2. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$.

   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2}c_n$.
4. (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (b) Déterminer la nature de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son éventuelle limite.

Exercice 2.

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}}$.

1. (a) Montrer que u_n existe et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.
2. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 10^6$.

```
import numpy as np
u = 1
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

3. Dresser le tableau de variation complet (avec les limites) de f sur $]0, +\infty[$.

On admet que : $\forall x \geqslant 1,\ \dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) - (x+1) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{x} \quad (*)$.

4. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.
5. (a) À l'aide de l'encadrement $(*)$, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $1 + \dfrac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \dfrac{\mathrm{e}}{u_k}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + \dfrac{1}{2}\ln(u_n) \leqslant u_n - n \leqslant 1 + \mathrm{e}\ln(u_n)$.
6. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{u_n} = 1$.
7. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = 1$.

Exercice 3. On considère un réel $a \in]0,1[$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer JK^2 puis en déduire $(M-I)(M-aI)^2$.

   (b) En déduire trois réels α, β, γ tels que $M^3 = \alpha M^2 + \beta M + \gamma I$.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3,\ M^n = u_n M^2 + v_n M + w_n I$.
   On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant $u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ à u_n, v_n et w_n.

   (b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script `Python` qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur.

```
n=int(input('entrez une valeur pour n :'))
a=float(input('entrez une valeur pour a :'))
u=0
v=0
w=1
for k in range(1,n+1):
    u=(2*a+1)*u+v
    v=-a*(a+2)*u+w
    w=a*a*u
print(u,v,w)
```

   (c) Modifier ce script en conséquence.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

   On admet que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme $u_n = \dfrac{(n-1)a^n - na^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$.

4. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A quand n tend vers $+\infty$ lorsque chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A.

   (a) Montrer que les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leur limite.

   (b) Justifier que la suite matricielle $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une matrice L et déterminer L.

   (c) Calculer L^2 .