Devoir surveillé 4 (interrogation écrite)

Jeudi 20 novembre 2025

Durée : 1h

Soit $b \in \mathbb{N}^*$. On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{i-1}, S_i, \ldots$ tels que :
- le sac S_1 contient $b+1$ billes jaunes et b vertes ;
- pour tout $i \geqslant 2$, le sac S_i contient b billes jaunes et b vertes.

On effectue des tirages successifs d'une bille de ces sacs de la manière suivante :
- le premier tirage consiste à extraire au hasard une bille du sac S_1 ;
- pour tout $i \geqslant 2$, on place dans le sac S_i la bille tirée du sac S_{i-1}, puis le i-ème tirage consiste à extraire au hasard une bille du sac S_i.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : «la bille tirée dans S_n est verte» et on note $a_n = \mathrm{P}(A_n)$ sa probabilité.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité de l'événement E_n «ne tirer que des boules jaunes au cours des n premiers tirages» ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité de l'événement F_n «tirer une boule verte au n-ième tirage et ce pour la première fois» ?
3. Montrer que $a_n = \dfrac{1}{2b+1} a_{n-1} + \dfrac{b}{2b+1}$ pour tout $n \geqslant 2$.
4. (a) Sans exprimer a_n en fonction de n, montrer que la suite (a_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$, puis montrer qu'elle est croissante.

   (b) En déduire que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.
5. Exprimer $\mathrm{P}(A_n)$ en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.

Devoir surveillé 4 (interrogation écrite)

Jeudi 20 novembre 2025

Durée : 1h

Soit $b \in \mathbb{N}^*$. On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{i-1}, S_i, \ldots$ tels que :
- le sac S_1 contient $b+1$ billes jaunes et b vertes ;
- pour tout $i \geqslant 2$, le sac S_i contient b billes jaunes et b vertes.

On effectue des tirages successifs d'une bille de ces sacs de la manière suivante :
- le premier tirage consiste à extraire au hasard une bille du sac S_1 ;
- pour tout $i \geqslant 2$, on place dans le sac S_i la bille tirée du sac S_{i-1}, puis le i-ème tirage consiste à extraire au hasard une bille du sac S_i.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : «la bille tirée dans S_n est verte» et on note $a_n = \mathrm{P}(A_n)$ sa probabilité.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité de l'événement E_n «ne tirer que des boules jaunes au cours des n premiers tirages» ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité de l'événement F_n «tirer une boule verte au n-ième tirage et ce pour la première fois» ?
3. Montrer que $a_n = \dfrac{1}{2b+1} a_{n-1} + \dfrac{b}{2b+1}$ pour tout $n \geqslant 2$.
4. (a) Sans exprimer a_n en fonction de n, montrer que la suite (a_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$, puis montrer qu'elle est croissante.

   (b) En déduire que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.
5. Exprimer $\mathrm{P}(A_n)$ en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.