

# Probabilités sur un univers fini

## PROBABILITÉS : GÉNÉRALITÉS

**Exercice 1.** Soient  $A, B, C$  trois événements. Exprimer en fonction de  $A, B, C$  et des opérations ensemblistes les événements suivants :

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>A</math> seul se produit,</li> <li>2. <math>A</math> et <math>C</math> se produisent, mais non <math>B</math>,</li> <li>3. les trois événements se produisent,</li> <li>4. l'un au moins des événements se produit,</li> <li>5. deux événements au moins se produisent,</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>6. un événement au plus se produit,</li> <li>7. aucun des trois événements ne se produit,</li> <li>8. deux événements exactement se produisent,</li> <li>9. pas plus de deux événements ne se produisent.</li> </ol> |
|--|---|

**Exercice 2.** Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes indiscernables au toucher. On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- $A$  : «les boules sont toutes de couleurs différentes»,
- $B$  : «les boules sont toutes de la même couleur»,
- $C$  : «exactement une boule est verte».

**Exercice 3.** 6 personnes prennent place au hasard dans 3 voitures pouvant accueillir de 0 à 6 passagers. Quelle est la probabilité que dans chaque voiture montent exactement 2 personnes ?

**Exercice 4.** Un groupe de  $n$  personnes ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) se présente au vestiaire d'une discothèque : chacune y dépose son blouson. Au moment de repartir, chacune de ces personnes reprend un blouson au hasard parmi les  $n$  blousons. Quelle est la probabilité que chaque personne reparte avec son blouson ?

**Exercice 5.** Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire les 3 boules successivement sans remise. On note

- $E_i$  l'événement «la boule numéro  $i$  est obtenue au tirage numéro  $i$ » pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,
- $E$  l'événement «au cours du tirage, il n'y a aucune coïncidence entre le numéro de la boule tirée et le numéro du tirage».

1. Exprimer  $\bar{E}$  à l'aide de  $E_1, E_2$  et  $E_3$ .
2. Calculer la probabilité de  $E$ .

**Exercice 6.** Lors d'un sommet diplomatique, le chef du service de sécurité recense 3 postes desquels il souhaite assurer la surveillance. Il dispose de 5 agents qu'il envoie au hasard sur les 3 postes. On note

- $V_i$  l'événement «le poste numéro  $i$  est vide» pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,
- $A$  l'événement «chacun des postes contient au moins un agent».

1. Exprimer  $\bar{A}$  à l'aide de  $V_1, V_2$  et  $V_3$ .
2. Calculer la probabilité de  $A$ .

## AVEC DU CONDITIONNEMENT EN PLUS

**Exercice 7.** Soient  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $P(A) = \frac{3}{8}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$  et  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Calculer  $P_{\bar{B}}(\bar{A})$ .

**Exercice 8.** Lors d'un prochain match, l'équipe F aura à affronter une des équipes A, B, C, D par tirage au sort. Il n'y a pas de match nul. La probabilité que F gagne si elle affronte A est 0,6. Elle est la même si F affronte B. Si F joue contre C, sa probabilité de gagner est 0,7 mais si F affronte D, la probabilité qu'elle perde le match est 0,8. Calculer la probabilité que F gagne le match.

**Exercice 9.** La proportion de pièces défectueuses dans un lot de pièces est 0,05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96,
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

**Exercice 10.** Soient  $N$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $n \leq N$ .

On dispose de  $N + 1$  urnes numérotées de 0 à  $N$ . L'urne numéro  $j$  contient  $j$  boules blanches et  $N - j$  boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire simultanément  $n$  boules dans cette urne.

Pour tout  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , on note  $U_j$  l'événement «on choisit l'urne  $j$ ». On note également  $B$  l'événement «les  $n$  boules tirées sont blanches».

$$1. \text{ Montrer que } P(B) = \frac{\sum_{j=n}^N \binom{j}{n}}{(N+1) \binom{N}{n}}.$$

$$2. \text{ A l'aide de la formule de Pascal, montrer que } \sum_{j=n}^N \binom{j}{n} = \binom{N+1}{n+1}$$

3. En déduire  $P(B)$ .

**Exercice 11.** Une araignée se déplace sur sa toile entre trois points A,B,C formant un triangle équilatéral. Au départ, elle se trouve sur l'un des sommets. Lorsqu'elle est sur l'un quelconque des sommets, elle va sur l'un des deux autres sommets avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $E_n$  l'événement «au bout de  $n$  déplacements, l'araignée se retrouve à son point de départ» et on pose  $p_n = P(E_n)$ .

1. Que vaut  $p_0$  ?  $p_1$  ?
2. Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. En déduire  $p_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 12.** Sur un étang, il y a trois nénuphars  $N_a, N_b, N_c$ . Un crapaud se promène de nénuphar en nénuphar. Au départ, il est sur  $N_a$ . Ensuite, il se déplace selon les règles suivantes :

- s'il est sur  $N_a$  à l'instant  $n$ , il va indifféremment sur un des trois nénuphars à l'instant  $n + 1$ ,
- s'il est sur  $N_b$  à l'instant  $n$ , il reste sur  $N_b$  à l'instant  $n + 1$ ,
- s'il est sur  $N_c$  à l'instant  $n$ , il reste sur  $N_c$  avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ , il va sur  $N_a$  avec la probabilité  $\frac{1}{12}$  et sur  $N_b$  avec la probabilité  $\frac{7}{12}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A_n$  (respectivement  $B_n, C_n$ ) l'événement «le crapaud est sur  $N_a$  (respectivement  $N_b, N_c$ ) à l'instant  $n$ », et on note  $p_n, q_n, r_n$  les probabilités respectives de  $A_n, B_n, C_n$ .

1. Exprimer  $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$  en fonction de  $p_n, q_n, r_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Exprimer  $r_{n+2}$  en fonction de  $r_{n+1}$  et  $r_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. En déduire  $p_n, q_n, r_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$  puis calculer leurs limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 13.** Une araignée se déplace sur sa toile entre trois points  $A, B$  et  $C$  formant un triangle équilatéral :

- lorsqu'elle est en  $A$ , elle va en  $B$  avec la probabilité  $\frac{4}{5}$  et en  $C$  avec la probabilité  $\frac{1}{5}$ .
- lorsqu'elle est en  $B$ , elle va en  $A$  avec la probabilité  $\frac{4}{5}$  et en  $C$  avec la probabilité  $\frac{1}{5}$ .
- lorsqu'elle est en  $C$ , elle va en  $A$  avec la probabilité  $\frac{1}{5}$  et en  $B$  avec la probabilité  $\frac{4}{5}$ .

Au départ, elle se trouve en  $A$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on définit :

- $A_n$  : « Au bout de  $n$  déplacements, elle se trouve en  $A$  » et  $a_n = P(A_n)$
- $B_n$  : « Au bout de  $n$  déplacements, elle se trouve en  $B$  » et  $b_n = P(B_n)$
- $C_n$  : « Au bout de  $n$  déplacements, elle se trouve en  $C$  » et  $c_n = P(C_n)$

On pose  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

1. Montrer qu'il existe une matrice  $M$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$ .
2. On pose  $P = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
3. Calculer  $N = P^{-1}MP$ . En déduire  $M^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Exprimer  $a_n, b_n, c_n$  en fonction de  $n$  puis préciser leur limite. Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n + c_n = 1$ .

**Exercice 14.** Une puce se déplace par sauts successifs sur les sommets et le centre de gravité  $O$  d'un triangle équilatéral. Au temps  $t = 0$ , elle est en  $O$ . Par la suite, elle saute du point où elle se trouve au temps  $t = k$  pour se retrouver sur l'un des autres points de façon équiprobable au temps  $t = k + 1$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $O_k$  l'événement «la puce est sur  $O$  au temps  $t = k$ » et, pour tout  $n \geq 2$ , on note  $R_n$  l'événement «la puce revient en  $O$  pour la première fois au temps  $t = n$ ».

1. Pour tout  $n \geq 2$ , exprimer  $R_n$  à l'aide des événements  $O_k$ .
2. Calculer la probabilité de  $R_n$  pour tout  $n \geq 2$ .

**Exercice 15.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On considère deux urnes  $A$  et  $B$  contenant chacune au départ une boule blanche et une boule noire. On réalise  $n$  fois l'expérience suivante :

- on tire une boule d'une des urnes,
- si elle est blanche, on la remet dans cette même urne et le tirage suivant se fait dans cette urne,
- si elle est noire, on la met dans l'autre urne et le tirage suivant se fait dans cette autre urne.

Le premier tirage se fait dans l'urne  $A$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'événement «le  $k$ -ième tirage se fait dans l'urne  $A$ » et  $B_k$  l'événement «le  $k$ -ième tirage donne une boule blanche».

1. Quelle probabilité a-t-on de tirer  $n$  fois dans la même urne ?
2. (a) Exprimer  $P(A_n)$  en fonction de  $P(A_{n-1})$ , si  $n \geq 2$ .  
(b) En déduire la probabilité de tirer au  $n$ -ième coup dans l'urne  $A$ .
3. Quelle probabilité a-t-on de tirer au  $n$ -ième coup une boule blanche ?

**Exercice 16.** Soient  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2,  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ .

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité  $p$  et "Face" avec la probabilité  $q$ . On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- soit si l'on a obtenu "Pile",
- soit si l'on a obtenu  $n$  fois "Face".

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $P_k$  (respectivement  $F_k$ ) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au  $k$ -ième lancer ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement  $X_0$  « on n'obtient pas de "Pile" ».
2. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , déterminer la probabilité de l'événement  $T_k$  : « on a effectué exactement  $k$  lancers ».
3. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer la probabilité de l'événement  $Y_k$  : « on a obtenu exactement  $k$  fois "Face" ».

## AVEC DE L'INDÉPENDANCE EN PLUS

**Exercice 17.** On dispose de deux dés équilibrés  $D_1$  et  $D_2$  :

- les faces de  $D_1$  sont numérotées de 1 à 6,
- $D_2$  possède cinq faces portant le 1 et une face portant le 6.

On choisit un dé au hasard et on le lance deux fois.

1. Les événements  $E$  «le premier lancer donne 1» et  $F$  «le deuxième lancer donne 1» sont-ils indépendants ?
2. Quelle est la morale de cet exercice ?

**Exercice 18.** On dispose de cinq pièces de monnaie dont une possède deux «face». On choisit une des cinq pièces au hasard et on la lance  $n$  fois.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir «face» au premier lancer ?
2. On a obtenu «face» au premier lancer. Quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce truquée ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir «face» aux  $n$  lancers ?
4. On a obtenu  $n$  «face» aux  $n$  lancers. Quelle est la probabilité  $p_n$  d'avoir choisi la pièce truquée ? Déterminer la limite de  $p_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 19.** Une urne contient  $b$  boules blanches et  $b$  boules noires ( $b \geq 1$ ). On effectue  $n$  tirages successifs d'une boule.

1. *Premier protocole* : les tirages se font avec remise.  
Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ?
2. *Second protocole* : les tirages se font sans remise.  
Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ?
3. *Troisième protocole* :
  - si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne,
  - si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne et on rajoute  $b$  boules blanches.Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ? que toutes les boules tirées soient noires ?