

Polynômes

DEGRÉ, COEFFICIENTS

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ avec $a_n \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les coefficients puis le degré de $Q : x \mapsto P(x + \alpha) - P(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1-x)^{3n-2k} x^k = (1-x^3)^n$.

Exercice 3. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie pour tout réel x par :

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

1. Calculer P_2 et P_3 .
2. Quel est le degré de P_n ? son coefficient dominant?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. En déduire la parité de P_n .
4. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

DIVISION EUCLIDIENNE, DIVISIBILITÉ, RACINES

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B .

1. $A : x \mapsto 4x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ et $B : x \mapsto x^3 - x + 1$
2. $A : x \mapsto x^{18} - x^{15} + x^2 - 7$ et $B : x \mapsto x^{19} + x^{10} + x^5 + 1$
3. $A : x \mapsto x^n + x^{n-1} + x + 1$ et $B : x \mapsto (x-1)^2 \quad (n \geq 2)$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, quel est le reste de la division euclidienne de A par B ?

1. $A : x \mapsto (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 2$ et $B : x \mapsto (x-1)(x+1) \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$
2. $A : x \mapsto ax^{n+1} + bx^n + 1$ et $B : x \mapsto (x-1)^2 \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

Exercice 6. Montrer que :

1. $x^2 - 3x + 2$ divise $(x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
2. $x^2 + x$ divise $(x+1)^{2n+1} - x^{2n+1} - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$.

Exercice 7. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[x]$ unitaires dont les divisions euclidiennes par $x+1$, par $x-1$ et par $x-2$ ont pour reste 3.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On pose $P : x \mapsto (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1$.

1. Montrer que $x^2 - 3x + 2$ divise P .
2. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathbb{R}[x]$, on a $A(x)^n - \alpha^n = (A(x) - \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1-k} A(x)^k$.
3. En se servant de la formule établie à la question précédente, déterminer le quotient de la division euclidienne de P par $x-2$.
4. En déduire le quotient de la division euclidienne de P par $x^2 - 3x + 2$.

FACTORISATION

Exercice 9. Factoriser $P : x \mapsto x^3 - 8$.

Exercice 10. Factoriser $P : x \mapsto 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$.

Exercice 11. Factoriser $P : x \mapsto x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$. En déduire le signe de $P(x)$ pour tout réel x .

Exercice 12. Factoriser $P : x \mapsto x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$.

Exercice 13. Factoriser $P : x \mapsto x^4 + 16$.

Exercice 14. Factoriser $P : x \mapsto x^4 - 5x^2 + 4$. En déduire le signe de $P(x)$ pour tout réel x .

Exercice 15. Factoriser $P : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.

Exercice 16. Factoriser $P : x \mapsto x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$. En déduire le signe de $P(x)$ pour tout réel x .

Exercice 17. Soit $P : x \mapsto x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $t = x + \frac{1}{x}$. Exprimer $\frac{P(x)}{x^2}$ sous la forme d'un polynôme de degré 2 en t .
2. Factoriser ce polynôme en t puis factoriser P .
3. Déterminer le signe de $P(x)$ pour tout réel x .

DÉTERMINATIONS D'ENSEMBLES DE POLYNÔMES

Exercice 18. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)$.

Montrer que $Q : x \mapsto P(x) - P(0)$ est égal à $0_{\mathbb{R}[x]}$. En déduire que P est une fonction polynôme constante.

Exercice 19.

1. Soit une fonction polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ non nulle vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)P(x) = P(x^2)$. Que dire du degré de P ?
2. En déduire toutes les fonctions polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)P(x) = P(x^2)$.

Exercice 20.

1. Soit une fonction polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ non constante vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = xP'(x)$. Quel est le terme dominant de $x \mapsto xP'(x)$? Que déduire du degré de P ?
2. En déduire toutes les fonctions polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = xP'(x)$.

DIVERS

Exercice 21. *Polynômes de Tchebychev*

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos \theta) \quad (\mathcal{T})$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout entier naturel n .
4. Étudier la parité de T_n pour tout entier naturel n .
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) A l'aide de la relation (\mathcal{T}) , déterminer les racines réelles de T_n qui appartiennent à $[-1, 1]$.
 - (b) En déduire la factorisation de T_n en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.
 - (c) En déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$