Variables aléatoires réelles sur un univers fini

Loi d'une variable aléatoire

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, 2n]\!]$ telle que $\mathrm{P}(X = k) = \alpha k$ pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$.

1. Déterminer α
2. Calculer $\mathrm{P}(X \in \mathcal{P})$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des éléments pairs de $[\![1, 2n]\!]$.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n.
On tire toutes les boules une à une et sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage au cours duquel le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment, ou égale à n si aucun des tirages ne vérifie cela.
Préciser l'ensemble des valeurs de X, déterminer $P(X > k)$ et en déduire la loi de X.

Exercice 3. Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient $n - 2$ boules blanches et 2 boules rouges. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On désigne par X le rang d'apparition de la première boule rouge et par Y celui de la seconde.
Déterminer la loi de X et celle de Y.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On procède à des tirages successifs et sans remise d'une boule dans cette urne jusqu'à l'obtention de la boule numéro n. On note alors X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement $[X = k]$ en fonction des événements S_i : «on obtient le numéro n au i-ème tirage» $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n + 1$ urnes numérotées de 0 à n, contenant chacune n boules, et d'une pièce dont la probabilité d'apparition de «pile» est $p \in [0, 1]$. L'urne k contient k boules portant le numéro 1 et $n - k$ boules portant le numéro 0.
On lance n fois la pièce et on tire une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de «piles» obtenus.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tiré et Y la variable aléatoire égale au nombre de «piles» obtenus.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la loi de X.
3. On a tiré une boule numéro 1. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne n ?

Espérance et variance

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de X sachant que $\mathrm{P}(X < 5) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X > 5) = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(X = 3) = \mathrm{P}(X = 4)$. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k)$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce dont la probabilité d'apparition de «pile» est égale à $p \in]0, 1[$. On désigne par X la variable aléatoire égale au numéro du lancer au cours duquel apparait «pile» pour la première fois, ou égale à $n + 1$ si «pile» n'apparait pas au cours des n lancers.

1. Déterminer la loi de X.
2. (a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

   (b) En déduire que $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p}$.

Exercice 9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément 2 boules.

1. On note Y le plus grand des numéros des deux boules.
   Déterminer $\mathrm{P}(Y \leqslant k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$, puis la loi de Y et enfin l'espérance de Y.
2. On note X le plus petit des numéros des deux boules. Déterminer la loi de X.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une puce se déplace en sautant sur les points d'abscisses $0, 1, 2, 3, \ldots$ d'une droite graduée. On convient que

— au départ, la puce est sur le point d'abscisse 0 ;

— la puce saute toujours vers un point d'abscisse plus grand selon la règle : si elle est sur le point d'abscisse k, elle saute au hasard sur le point d'abscisse $k+1$ ou sur le point d'abscisse $k+2$.

Soient X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du point où se trouve la puce au bout de n sauts et Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce s'est déplacée d'une seule graduation au cours des n premiers sauts.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. De même pour X_n.

Exercice 11. Dans une production totale de N objets dont M sont défectueux, on prélève au hasard un échantillon de n objets. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'objets défectueux dans l'échantillon.

1. En posant $p = \dfrac{M}{N}$, montrer que

$$\begin{cases} X \text{ prend les valeurs de } [\![\max(0, n-N(1-p)), \min(n, Np)]\!] \\ \forall k \in [\![\max(0, n-N(1-p)), \min(n, Np)]\!],\ \mathrm{P}(X=k) = \dfrac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{N-Np}{n-k}}{\dbinom{N}{n}} \end{cases}$$

2. Déterminer $\mathrm{E}(X)$.
   On rappelle la formule de Vandermonde :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3,\ \sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c} \qquad \textit{avec la convention } \binom{m}{\ell} = 0 \textit{ si } \ell > m$$

Exercice 12. Soit $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X.
2. En déduire que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{P}(Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=k}^{n} \frac{1}{\ell}$$

3. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 13. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = 2^X$.