Devoir maison 4

Pour le jeudi 4 décembre 2025

Soit N un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on peut effectuer une succession de tirages **avec remise** d'un jeton en notant, à chaque fois, le numéro obtenu. Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre (aléatoire) de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages.

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Quelles sont les valeurs prises T_n ?
   (b) Calculer $\mathrm{P}(T_n = 1)$ et $\mathrm{P}(T_n = n)$.
   (c) Déterminer $\mathrm{P}(T_n = 2)$.
2. Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls avec $1 \leqslant k \leqslant N$. Montrer que

$$\mathrm{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathrm{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathrm{P}(T_n = k-1)$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(T_n = k)x^k$$

   (a) Prouver l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)$$

   (b) Pour tout entier naturel n non nul, en reliant l'espérance $\mathrm{E}(T_n)$ à G_n', montrer que

$$\mathrm{E}(T_{n+1}) = \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)\mathrm{E}(T_n) + 1$$

   (c) En déduire $\mathrm{E}(T_n)$ en fonction de N et n.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{E(T_N)}{N}$.