

Devoir maison 5

Pour le lundi 5 janvier 2026

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = x - n \ln(x)$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
 (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. *Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.*
 (a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
 (b) Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
 (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et déterminer sa limite.

3. *Etude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.*
 (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$.
 (c) Etablir : $\forall n \geq 3, n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
 (d) Déterminer la limite de $\frac{\ln(v_n)}{\ln n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \sqrt{x} e^{-\frac{x}{2}}$$

1. (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R}^+ . La courbe représentative de f a-t-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?
 (b) Dresser le tableau de variation de f .
 (c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée) en faisant figurer les points remarquables.
2. (a) Montrer que la restriction de f à $[0, 1]$ admet une fonction réciproque φ dont on précisera les ensembles de départ J_1 et d'arrivée I_1 . Dresser le tableau de variation de φ .
 (b) Etudier la continuité et la dérivabilité de φ sur J_1 .
3. Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ admet une fonction réciproque ψ dont on précisera les ensembles de départ J_2 et d'arrivée I_2 . Dresser le tableau de variation de ψ .
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
 (a) Montrer que f admet deux points fixes : 0 et $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [0, 1]$. (*Indication : dans cette question, on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} - \sqrt{x}$.)*
 (b) Supposons dans cette question que $u_0 \in]0, \alpha[$.
 i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \alpha]$.
 ii. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 iii. Etudier la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et, si elle converge, déterminer sa limite.
 (c) Supposons dans cette question que $u_0 \in]\alpha, 1]$.
 i. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\alpha, 1]$.
 ii. Etudier la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et, si elle converge, déterminer sa limite.
 (d) Que se passe-t-il si $u_0 = 0$? si $u_0 = \alpha$?