Devoir surveillé 5 (interrogation écrite)

Jeudi 4 décembre 2025

Durée : 1h

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k)$.

Exercice 2. Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher. La proportion de boules rouges est $p \in]0, 1[$ et celle de boules noires est $q = 1 - p$. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. Un maximum de n tirages, avec $n \geqslant 1$, est cependant fixé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du n-ième tirage.
On note G_n la variable aléatoire égale au rang du tirage d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue au cours des n tirages.

1. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire G_n.
   (b) En utilisant la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$, montrer que l'on a : $\mathrm{E}(G_n) = \dfrac{1 - q^n(1 + np)}{p}$.
   (c) Déterminer la limite de $\mathrm{E}(G_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue au cours des n tirages.
   On mise de la manière suivante : pour jouer une partie, il faut payer 15 euros. Si la partie est gagnée à la k-ième boule tirée, pour un $k \leqslant n$, le joueur gagne $(20 - k)$ euros, sinon il ne gagne rien. On note B_n le gain aléatoire pour une partie.
   (a) Exprimer B_n sous la forme $g(G_n)$ où $g : G_n(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application à déterminer.
   (b) Déterminer $\mathrm{E}(B_n)$.

Devoir surveillé 5 (interrogation écrite)

Jeudi 4 décembre 2025

Durée : 1h

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k)$.

Exercice 2. Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher. La proportion de boules rouges est $p \in]0, 1[$ et celle de boules noires est $q = 1 - p$. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. Un maximum de n tirages, avec $n \geqslant 1$, est cependant fixé : on décide de s'arrêter si on n'a pas tiré de boule rouge à l'issue du n-ième tirage.
On note G_n la variable aléatoire égale au rang du tirage d'une boule rouge, si ce rang existe, et qui vaut 0 si aucune boule rouge n'est apparue au cours des n tirages.

1. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire G_n.
   (b) En utilisant la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$, montrer que l'on a : $\mathrm{E}(G_n) = \dfrac{1 - q^n(1 + np)}{p}$.
   (c) Déterminer la limite de $\mathrm{E}(G_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Ce processus peut être considéré comme une partie qui est gagnée si une boule rouge est apparue au cours des n tirages.
   On mise de la manière suivante : pour jouer une partie, il faut payer 15 euros. Si la partie est gagnée à la k-ième boule tirée, pour un $k \leqslant n$, le joueur gagne $(20 - k)$ euros, sinon il ne gagne rien. On note B_n le gain aléatoire pour une partie.
   (a) Exprimer B_n sous la forme $g(G_n)$ où $g : G_n(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application à déterminer.
   (b) Déterminer $\mathrm{E}(B_n)$.