Fonctions numériques réelles

Généralités

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+\mathrm{e}^x}{x+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
Montrer que la courbe Γ admet en $-\infty$ une asymptote oblique.

Exercice 2. Montrer que la fonction $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \lfloor x\rfloor\end{array}$ est croissante.

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction décroissante f de $[a,b]$ dans $[a,b]$ admet au plus un point fixe dans $[a,b]$.

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\leqslant x \qquad \text{et} \qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

1. Montrer que $f(0)=0$.
2. Montrer que f est impaire.
3. En déduire que $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions réelles bornées définies sur une partie non vide D de $\mathbb{R}$.
Montrer que : $\sup\limits_D|f+g|\leqslant\sup\limits_D|f|+\sup\limits_D|g|$. Y-a-t-il égalité ?

Calculs de limites

Exercice 7. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(-x^2(x+2)-1\big)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x\Big(x+\dfrac{3}{x}\Big)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+2x^2-4)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+2x^2-4)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^3+1}{x^2-4x+5}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^3+1}{x^2-4x+5}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x}{3x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^3}{-2x^2+8}$
9. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-x}{x-1}$
10. $\lim\limits_{x\to0^+}\Big(\dfrac{1}{x}+2\Big)(x^2-1)$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\dfrac{1}{x}+2\Big)(x^2-1)$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3-2x)^3}{1-x}$
13. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(3-2x)^3}{1-x}$
14. $\lim\limits_{x\to0^+}\Big(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x}\Big)$
15. $\lim\limits_{x\to4^-}\Big(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x}\Big)$
16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$
17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}+2}$
18. $\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
20. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-x}{x-2}$
21. $\lim\limits_{x\to-1}\Big(3-\dfrac{2}{(x+1)^2}\Big)$
22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\dfrac{(x^2-x+2)(3-x)}{(x-1)^2}+x-2\Big)$
23. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x)$
24. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x)$
25. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$
26. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x}$
27. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^{-x}$
28. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1+\mathrm{e}^x)$
29. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1+\mathrm{e}^x)$

30. $\lim_{x\to+\infty}(2e^x - e^{2x})$
31. $\lim_{x\to-\infty}(2e^x - e^{2x})$
32. $\lim_{x\to+\infty} x(1+e^{-2x})$
33. $\lim_{x\to-\infty} x(1+e^{-2x})$
34. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x+6)e^x$
35. $\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x+6)e^x$
36. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$
37. $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$
38. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x+1}{2x-3}}$
39. $\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} e^{\frac{x+1}{2x-3}}$
40. $\lim_{x\to0^+}(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$
41. $\lim_{x\to1^+}(x+2)e^{\frac{1}{x-1}}$
42. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{e^{2x}+1}-e^x)$
43. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{2+e^x}$
44. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{2+e^x}$
45. $\lim_{x\to-1^+}\dfrac{e^x}{x+1}$
46. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+1}$
47. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{e^x+1}$
48. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{e^x+1}$
49. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^{-x}-1}$
50. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{x^2+1}{e^{-x}-1}$
51. $\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{\frac{x}{2}}$
52. $\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{\frac{x}{2}}$
53. $\lim_{x\to+\infty}(e^x-x^3+2x-1)$
54. $\lim_{x\to-\infty}(e^x-x^3+2x-1)$
55. $\lim_{x\to-\infty}\big((x+1)e^x-2\big)$
56. $\lim_{x\to+\infty}\big((x+1)e^x-2\big)$
57. $\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x}}$
58. $\lim_{x\to0^+} xe^{-\frac{1}{x}}$
59. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}$
60. $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$
61. $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$
62. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{-1+\ln x}$
63. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{-1}{-1+\ln x}$
64. $\lim_{x\to+\infty}\big((\ln x)^2-\ln x\big)$
65. $\lim_{x\to0^+}\big((\ln x)^2-\ln x\big)$
66. $\lim_{x\to1^+}\ln(x^2+3x-4)$
67. $\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+3x-4)$
68. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)$
69. $\lim_{x\to0^-}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$
70. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$
71. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x+2}{e^x+1}\right)$
72. $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{e^x+2}{e^x+1}\right)$
73. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{1-\ln x}{x}$
74. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x}{x}$
75. $\lim_{x\to0^+} x(1-\ln x)$
76. $\lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x)$
77. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x^2+1}$
78. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{x\ln x}{x^2+1}$
79. $\lim_{x\to0^+}(x^2-x)\ln x$
80. $\lim_{x\to+\infty}(2x+1-\ln x)$
81. $\lim_{x\to+\infty}\Big(-(\ln x)^2-2\ln x+x\ln x\Big)$

Exercice 8. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$
2. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$, avec $(p,q)\in(\mathbb{R}^*)^2$

Exercice 9. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to0}\sqrt{\dfrac{1}{1-\cos x}}$
2. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2-\cos x}$
3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{4x-\pi}$
4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan^2 x-\tan x)$
5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\tan^2 x-\tan x)$
6. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\dfrac{\tan x}{\tan x-1}$
7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\tan x}{\tan x-1}$
8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$
9. $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
10. $\lim_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$
11. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{1+x^2}$
12. $\lim_{x\to0}\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
13. $\lim_{x\to0} xe^{\frac{1}{\sin x}}$
14. $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}$,

avec $a \in \mathbb{R}^*$

15. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{e^{-ax^2} - e^{-a}}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$

Exercice 10. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
2. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \quad (a > 0, b > 0)$
5. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
6. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\lfloor 1/x \rfloor + x}{\lfloor 1/x \rfloor - x}$

Exercice 11. Les limites suivantes existent-elles ?

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \sin x}{x^2 + 1}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$

Etude de la continuité

Exercice 12. Est-il possible de prolonger par continuité les fonctions suivantes en x_0 ?

1. $x_0 = \dfrac{1}{2}, \quad f : x \longmapsto \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$
2. $x_0 = 1, \quad f : x \longmapsto \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1)$
3. $x_0 = 0, \quad f : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $x_0 = 0, \quad f : x \longmapsto x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 13. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$
2. $h : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

Exercice 14. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto (x^2 - 1) \sin\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$
2. $g : x \longmapsto \cos(\ln |x|) \ln(1 + x)$
3. $i : x \longmapsto \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$

Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer que f a un unique point fixe.

Exercice 16. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(\alpha + \dfrac{1}{2}\right) = f(\alpha)$.

Exercice 17.

1. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell' \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

Exercice 18. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que les fonctions

$$\sup(f,g) : x \longmapsto \sup(f(x), g(x))$$

$$\inf(f,g) : x \longmapsto \inf(f(x), g(x))$$

sont continues sur I.

Equations

Exercice 19. Montrer que l'équation $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Montrer que l'équation $\dfrac{1}{x+1} \cos x - x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Fonction réciproque

Exercice 21. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ à préciser. On déterminera ensuite la bijection réciproque.

Exercice 22. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + x - 8 \end{array}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Combien l'équation $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$? La résoudre ensuite.

Divers

Exercice 23. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant $f(2x) = f(x)$ pour tout réel x.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$
2. En déduire que f est constante.

Exercice 24. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue sur I et vérifiant : $\forall x \in I,\ f(x)^2 = f(x)$. Montrer que f est constante.

Suites définies implicitement

Exercice 25. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$$

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $0 < \alpha_n < 1$.
3. Montrer que $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la monotonie de la suite (α_n).
4. Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 26.

1. Pour tout entier $n \geqslant 3$, montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = x^n$ possède une unique solution dans $[0, n]$, que l'on note x_n. *(Indication : considérer $f_n : x \longmapsto x^n \mathrm{e}^{-x} - 1$.)*
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ pour tout $n \geqslant 3$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 3}$ est convergente et déterminer sa limite.