Dérivation

Dérivée

Exercice 1. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité.

1. $f : x \longmapsto (4-3\,x)^3$
2. $f : x \longmapsto (x^4-x^2+1)^3$
3. $f : x \longmapsto (2\,x-1)^2\,(4-3\,x)^3$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(4-5\,x)^3}$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{(3\,x-1)^4}{(2\,x-4)^4}$
6. $f : x \longmapsto \dfrac{(4\,x-3)^3}{3\,x^2+1}$
7. $f : x \longmapsto \dfrac{(3\,x-2)^3}{(1-4\,x)^2}$
8. $f : x \longmapsto \sqrt{3\,x^2+1}$
9. $f : x \longmapsto \sqrt{4\,x^2-3\,x-1}$
10. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
11. $f : x \longmapsto (1+\sin(2\,x))^3$
12. $f : x \longmapsto \cos^2(3\,x)\sin^3(2\,x)$
13. $f : x \longmapsto \sqrt{2+\sin(x)}$
14. $f : x \longmapsto \tan^2(x+\dfrac{\pi}{3})$
15. $f : x \longmapsto x^3+\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^x$
16. $f : x \longmapsto 4\,x\,\mathrm{e}^x$
17. $f : x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^{3\,x}+\mathrm{e}^{-2\,x}$
18. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x+1}$
19. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$
20. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$
21. $f : x \longmapsto (x^2+4)\,\mathrm{e}^{-2\,x}$
22. $f : x \longmapsto (2\,x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+3\,x+1}$
23. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}$
24. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{2\,x+3}{x-2}}$
25. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{2\,x}-1}$
26. $f : x \longmapsto \ln(3\,x+1)$
27. $f : x \longmapsto (x-1)\ln(2-x)$
28. $f : x \longmapsto \ln(x^3)$
29. $f : x \longmapsto \ln(x^2+x+1)$
30. $f : x \longmapsto \ln(\sqrt{5-4\,x})$
31. $f : x \longmapsto \ln(\dfrac{1-x}{3-2\,x})$
32. $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$
33. $f : x \longmapsto \ln(\sin x)$
34. $f : x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x+2)$
35. $f : x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^{3\,x}+2)$
36. $f : x \longmapsto \ln(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1})$
37. $f : x \longmapsto (x-1)\,(2\ln(x-1)+5)$
38. $f : x \longmapsto \dfrac{5^x}{5^{2\,x}-1}$
39. $f : x \longmapsto x\,3^{-x}$

Exercice 2. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point indiqué (après avoir prolongé par continuité si nécessaire).

1. $f : x \longmapsto x|x|$ en 0
2. $f : x \longmapsto x^2 - |x|$ en 0
3. $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$ en 0^+
4. $f : x \longmapsto |\sin x|$ en 0
5. $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ en 0
6. $f : x \longmapsto \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0
7. $f : x \longmapsto x\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$ en 0

Exercice 3. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la fonction dérivée.

1. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\ln x$
2. $f : x \longmapsto x^x$
3. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x-\ln x+\sqrt{1+(\ln x)^2}}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
5. $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-|x|}$
6. $f : x \longmapsto |x-3| + |3x-2|$
7. $f : x \longmapsto \cos\sqrt{x}$
8. $f : x \longmapsto \ln(\ln x)$
9. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$

Exercice 4. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $|f|$ est dérivable en tout point de I où f ne s'annule pas et exprimer sa dérivée.

Exercice 5. Etudier la continuité, la dérivabilité et le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Exercice 6. Etudier la continuité, la dérivabilité et le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Exercice 7. Etudier la continuité, la dérivabilité et le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{|x|}$.

Equations fonctionnelles

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que $f(2x) = 2f(x)$ pour tout réel x.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
3. En déduire que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f'(x+y) = f'(x)$
3. En déduire que f est une fonction linéaire.

Fonction réciproque

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Montrer que f est bijective de $[\mathrm{e},+\infty[$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ à préciser puis étudier la dérivabilité de la fonction réciproque g. Exprimer alors g' en fonction de g sans logarithme népérien.

Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Exercice 11. Soient $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ s'annulant en n points distincts. Montrer que f' s'annule au moins $n-1$ fois.

Exercice 12. Soit $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(a > 0)$ continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
(*Indication : on pourra étudier g définie sur $[0,1/a]$ par $g(0) = f(a)$ et $g(x) = f(1/x)$ pour tout $x \in]0,1/a]$.*)

Exercice 13. Soient $a > 0$ et $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(a) = 0 \ \text{ et } \ f'(0) = 0$$

1. On considère la fonction g définie sur $]0,a]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,a]$.
   (a) Montrer que la fonction g se prolonge par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.
   (b) Montrer que la dérivée de g s'annule sur $]0,a[$.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à la courbe de f passe par l'origine.

Exercice 14. Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c)$.
   (*Ind. : penser à la fonction $\varphi : x \longmapsto \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x)$.*)
2. Soit $\alpha \in]a,b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a,\alpha[\cup]\alpha,b[$, que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ et que $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Exercice 15. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

Exercice 16. A l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 17. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = 0$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

1. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$\min_{x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} (f'(x)) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \max_{x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} (f'(x)) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

   pour tout entier naturel n non nul.
2. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

Etudes des variations d'une fonction

Exercice 18.

1. Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x}$ sur $[-1, +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\tan \circ f$.

Exercice 19. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sqrt{1-x^2} \end{array}$.
Expliquer pourquoi f admet un maximum et un minimum sur $[0, 1]$. Les déterminer.

La fonction Arctangente

Exercice 20. Calculer

1. $\tan(\operatorname{Arctan}(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)\right)$

Exercice 21.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{Arctan}(x))}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = x\cos(\operatorname{Arctan}(x))$.
3. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad$ et $\quad \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 22.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} = 1$.
2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x > 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 23. Simplifier $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 24.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+k+k^2}\right)$.
2. Etudier la limite de la suite (S_n) de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

Suites vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 25. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(3+u_n) \end{cases}$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \longmapsto \ln(3+x)$.
2. Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, +\infty[$ vérifiant $g(\alpha) = 0$ et déterminer le signe de la fonction g sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 26. On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2+x} \end{array}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$$

1. Montrer que u_n existe et $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x) = x$.
3. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - (-1+\sqrt{2})\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|u_n - (-1+\sqrt{2})\right|$
4. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n - (-1+\sqrt{2})\right| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \left|u_0 - (-1+\sqrt{2})\right|$
5. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 27. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2}$.

1. Montrer que $g([0,1]) \subset [0,1]$.
2. Soit h la fonction définie sur $]0,1]$ par : $\forall x \in]0,1],\ h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1]$ tel que $h(\alpha) = 1$.
   (b) En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $\dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha+2} = \alpha$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$.

3. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.