Devoir maison 6

Pour le lundi 26 janvier 2026

Le but du problème est l'étude de l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et, pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$$

On note r l'application de $]-1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $r(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$ pour tout $u > -1$.

1. *Etude globale de F sur $\mathbb{R}^*$*
   (a) Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
   (b) Etudier la parité de F.
   (c) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ xF'(x) = -F(x) + r(x^4)$.
   (d) Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ r(x^4) \leqslant F(x)$.
   (e) En déduire que F est décroissante sur $]0,+\infty[$.
2. *Etude locale de F en 0*
   (a) Montrer que F est continue en 0.
   (b) Etablir : $\forall u \in [0,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2}u \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} - 1 \leqslant 0$.
   (c) Montrer que F est dérivable en 0, et calculer $F'(0)$.
3. *Etude locale de F en $+\infty$*
   (a) On note h l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En utilisant le changement de variable $z = \dfrac{1}{t}$, former une relation entre $h(x)$ et $h\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
   (b) En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[,\ xF(x) + \dfrac{1}{x}F\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2F(1)$.
   (c) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
   (d) Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0$.