Devoir surveillé 6

Samedi 10 janvier 2026

Durée : 3h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être encadrés. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : ***les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.***
Le sujet comporte 2 page(s).

Exercice 1. On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés $1, 2, \ldots, n$, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement : « le joueur réussit le niveau k ».

1. Compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur pour p.

```
import numpy.random as rd
p=float(input('Entrez la valeur de p dans ]0;1[ :'))
n=int(input('Entrez la valeur de n :'))
X=..........
while .......... and rd.random()<=p:
    X=..........
print('Le niveau du joueur est : ',X)
```

2. (a) Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par X_n. Justifier soigneusement.
   (b) Déterminer la probabilité $\mathrm{P}(X_n = n)$.
   (c) Pour tout entier k de $[\![0, n-1]\!]$, déterminer la probabilité $\mathrm{P}(X_n = k)$.
3. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) = 1$.
4. (a) En utilisant la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$, déterminer l'espérance de X_n.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(X_n)$.

Exercice 2.

Étude d'une fonction

1. Étudier sur $]0,+\infty[$ la fonction $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$. On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes, les extrema et asymptotes éventuels.
2. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0. Ce prolongement sera encore noté f.
   Préciser la valeur de f en 0.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Montrer que f est une bijection de $]0,\mathrm{e}]$ sur $]0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$.
5. La fonction réciproque de f est-elle continue sur $]0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$? Est-elle dérivable sur $]0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$?

Étude d'une suite

Soit x un réel fixé strictement positif. On pose $\Phi_x(t) = x^t$ pour tout réel t, et on définit la suite (t_n) de la manière suivante :

$$t_0 = 1, \qquad t_{n+1} = \Phi_x(t_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Lorsque la suite (t_n) est convergente, on note $h(x)$ sa limite dans $\mathbb{R}$.

6. Si $x = 1$, que peut-on dire sur la convergence de la suite (t_n) ?
7. Justifier que si $h(x)$ existe (c'est-à-dire la suite (t_n) est convergente) alors $h(x) = \Phi_x(h(x))$, puis en déduire dans ce cas que $f(h(x)) = x$.

On va traiter le cas $x > 1$.

8. Montrer que pour $x \in]1,+\infty[$, la fonction $\Phi_x : t \longmapsto x^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
9. Soit $x > 1$. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n < t_{n+1}$.
10. On suppose $x \in]1,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n \leqslant \mathrm{e}$.
    En déduire que, dans ce cas, la suite (t_n) est convergente.
11. On suppose $x > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, et on veut montrer que la suite (t_n) a pour limite $+\infty$.
    On pourra supposer que la suite est convergente vers $h(x)$ et en utilisant les questions 7 et 1, aboutir à une contradiction. Conclure.

On va étudier le cas $x \in]0,1[$.

12. Montrer que pour $x \in]0,1[$, la fonction $\Phi_x : t \longmapsto x^t$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
    Que peut-on déduire sur la monotonie de $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$?
13. Pour $0 < x < 1$, montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{2n+1} < t_{2n}$.
14. On suppose $0 < x < 1$. Montrer par récurrence que la suite extraite (t_{2n}) est décroissante, puis que la suite extraite (t_{2n+1}) est croissante.
15. On suppose $0 < x < 1$. En déduire que les suites extraites (t_{2n}) et (t_{2n+1}) sont toutes deux convergentes, et que leur limite ne peut être qu'un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$, c'est-à-dire une solution de $(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) = t$ dans $[0,1]$.