

Intégration sur un segment

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$, $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer, par l'absurde, que f admet un point fixe dans $[0, 1]$. (*Indication : penser à $t \mapsto f(t) - t$.*)

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$.

A quelle condition nécessaire et suffisante sur f a-t-on $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$?

Exercice 4. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $P \in \mathbb{R}[x]$. On suppose que $\int_a^b t^k P(t) dt = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\int_a^b P(t)^2 dt = 0$.
2. Qu'en déduire du polynôme P ?

Exercice 5. Soient a et b deux réels avec $a < b$, f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*

- (a) Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par $P(x) = \int_a^b (xf(t) + g(t))^2 dt$ est une fonction polynôme en x .
- (b) Déterminer le signe de $P(x)$ et montrer que

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right) \quad (\#)$$

- (c) Montrer que, si f et g sont continues sur $[a, b]$, alors on a égalité dans (#) si et seulement si f et g sont proportionnelles.

2. *Inégalité de Minkowski.*

- (a) Dédurre de l'inégalité (#) de Cauchy-Schwarz que

$$\left(\int_a^b (f+g)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2} \quad (\#\#)$$

- (b) Montrer que, si f et g sont continues sur $[a, b]$, alors on a égalité dans (\#\#) si et seulement si f et g sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité dans \mathbb{R}^+ .

CALCULS DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

Exercice 6. Donner une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles demandés :

1. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$ sur \mathbb{R}
2. $f(x) = 2x^5 - x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 3$ sur \mathbb{R}_+^*
3. $f(x) = 3x \sin(x^2)$ sur \mathbb{R}

Exercice 7. Donner une primitive des fonctions suivantes (on précisera le domaine de validité de ces primitives) :

1. $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$

2. $f(x) = \frac{10x+3}{5x^2+3x+1}$

3. $f(x) = \sin x \cos^5 x$

4. $f(x) = 3xe^{-x^2+1}$

5. $f(x) = \sin 5x$

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+8x}}$

7. $f(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}$

8. $f(x) = 3^{\cos x} \sin x$

9. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

10. $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1}$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-3} + \frac{1}{t+3} \right) dt$

2. $\int_7^5 \frac{t}{t-3} dt$

3. $\int_e^3 \frac{dt}{t \ln t}$

4. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt$

5. $\int_1^e \frac{\ln t}{t} dt$

6. $\int_0^2 (1-|t-1|^3) dt$

7. $\int_0^{-\sqrt{2}} \left(|t+1| + \frac{1}{t-1} \right) dt$

8. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(1 - \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \right) dt$

9. $\int_{-2}^2 |t^2-1| dt$

10. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos 3x}{\sin 3x} dx$

11. $\int_{-1}^{-2} \frac{2}{x^3} dx$

12. $\int_{\sqrt{3}}^0 \frac{4x}{x^2-4} dx$

13. $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$

14. $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$

15. $\int_0^{\pi} \cos^4 t dt$

16. $\int_0^1 t \inf\left(\frac{1}{2}, t\right) dt$

17. $\int_0^{\pi} [\cos(t) + \inf(t, 1)] dt$

Exercice 9. *Intégration par parties.*

1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_1^2 \ln t dt$

(b) $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$

(c) $\int_1^2 xe^{-x} dx$

(d) $\int_{\frac{1}{e}}^e x^2 \ln x dx$

(e) $\int_0^1 (2-t)e^t dt$

(f) $\int_0^1 t^2 e^t dt$

(g) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \cos(3x) dx$

(h) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$

(i) $\int_0^1 \arctan t dt$

(j) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$

(k) $\int_0^1 t \ln(1+t^2) dt$

(l) $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$

(m) $\int_0^1 \ln(t + \sqrt{t^2+1}) dt$

2. On pose $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

3. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \ln(x+2) \text{ sur }]-2, +\infty[\quad x \mapsto x^2 \sin x \text{ sur } \mathbb{R}$$

4. Soit $(\alpha, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Déterminer une primitive de $f(x) = e^{\alpha x} \cos ax$.

Exercice 10. *Changement de variable.*

1. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ par deux méthodes : avec $t = \sin x$ et sans changement de variable.

2. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1}$

(b) $\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+t+1} dt$

(c) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} \quad (t = \tan \frac{x}{2})$

(d) $\int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+1)} \quad (u = t^3)$

(e) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^3 t \, dt \quad (u = \sin t)$

3. Calculer $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^{2x} + 1}$ à l'aide du changement de variable $t = e^x$.

(Ind. : il pourra être utile de déterminer des réels a, b et c tels que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$.)

4. Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{2 \, dx}{1 + \tan x}$ à l'aide du changement de variable $t = \tan x$.

(Ind. : il pourra être utile de déterminer des réels a, b et c tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$.)

5. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$ sur \mathbb{R}

(c) $f(x) = (2x+3)^{15}(x+2)$ sur \mathbb{R}

(b) $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$ sur \mathbb{R}^+ ($x = u^2$)

(d) $f(x) = x^3 \sqrt{x^2 - 1}$ sur $[2, +\infty[$ ($u = x^2 - 1$)

Exercice 11.

1. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} \, dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} \, dt$.

2. En déduire $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} + x}$.

SOMMES DE RIEMANN

Exercice 12. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} \quad w_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

LIMITES D'INTÉGRALES

Exercice 13.

1. On suppose ici qu'on a $x \in [0, 1]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nxe^{-nx^2}$.

2. Calculer $I_n = \int_0^1 nxe^{-nx^2} \, dx$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3. Quelle est la morale de cet exercice ?

Exercice 14. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n t}{\cos t} \, dt = 0$.

Exercice 15. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) \, dt = 0$.

Exercice 16. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+e^t} \, dt$.

Exercice 17. Soient a et b deux réels avec $a < b$, f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt$$

Montrer que $\lim I_n = \lim J_n = 0$.

DIVERS

Exercice 18.

1. Justifier que : $\forall t \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

En déduire que : $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt$.

2. En déduire que $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) \right| \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}$ puis que

$$\forall x \in [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Exercice 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

1. Calculer I_0 .
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2} dt$.
5. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \ln 2$.

FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

Exercice 20. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et g l'application qui à tout réel x associe $g(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$.
Vérifier que g est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
Même exercice avec $h(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$ et $k(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.
2. On considère $f : x \mapsto \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$. Montrer que f est bien définie, continue et positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Montrer qu'elle est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x \frac{e^t \cos t}{\sqrt{|t|+1}} dt$.

Exercice 21. Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

1. (a) Etudier la parité de f .
(b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
(c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. (a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(b) Etudier les variations de f .

Exercice 22. On pose $u(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ pour tout réel x .

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une application de \mathbb{R} dans lui-même.
2. (a) On suppose que a appartient à $[-2, 2]$. Montrer que $0 \leq \int_0^a (a-t)e^t dt \leq \frac{1}{2}a^2e^2$.
(On sera amené à étudier séparément 2 cas).

- (b) Montrer que pour tout réel a , on a : $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t dt$
 Quelle inégalité peut-on en déduire ?
3. Soit h un réel tel que $0 < |h| < 1$.
- (a) Ecrire, sans calculer, $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ pour tout réel x .
- (b) Montrer que l'on peut appliquer l'inégalité du 2b à $a = -h(1+t^2)$ pour tout $t \in [0, 1]$.
- (c) En déduire que u est dérivable sur \mathbb{R} et que : $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$.
4. Pour tout réel x , on pose $v(x) = u(x^2)$ et $w(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$.
- (a) Montrer que v et w sont dérivables sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que pour tout réel x , on a $v'(x) = -w'(x)$.
- (c) Calculer $v(0) + w(0)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) + w(x) = \frac{\pi}{4}$.
5. (a) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $a > A \implies 0 < e^{-a} < \frac{1}{a}$.
- (b) On suppose que $x > A$. Montrer que l'on a : $0 \leq u(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.
 En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)$.
6. Soit $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Déduire de ce qui précède les valeurs de I et de J .