

# Espaces vectoriels

## ESPACES VECTORIELS, SOUS-ESPACES VECTORIELS

**Exercice 1.** Les ensembles suivants sont-ils des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ?

1.  $\{P \in \mathbb{R}[x] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)\}$
2.  $\{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \geq 17\}$
3.  $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 2f' - f = 0\}$
4.  $\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + f' = 1\}$
5.  $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}$
6.  $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$
7.  $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1\}$
8.  $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_n \rightarrow 1\}$

**Exercice 2.** Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui, en déterminer une base.

1.  $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$
2.  $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$
3.  $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
4.  $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 1\}$
5.  $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$
6.  $F_6 = \{(x - y, x, 2x + y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
7.  $F_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$
8.  $F_8 = \{(x + y - z, x + 2y - 4z, 2x + y + z, x + y - z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

## FAMILLES DE VECTEURS

**Exercice 3.** Déterminer une base du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  suivant :

$$F = \text{Vect} \left( (1, 2, -1, 3), (-1, 1, 3, -2), (2, 4, 3, 2), (2, 1, 1, 1) \right)$$

**Exercice 4.** Déterminer une base du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  suivant :

$$F = \text{Vect} \left( (4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1) \right)$$

**Exercice 5.** Déterminer une (ou des) équation(s) du sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect} \left( (1, 1, 1), (2, -1, 1), (-1, -4, -2) \right)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 6.** On considère les trois éléments  $P : x \mapsto 3 - x + 2x^2 + x^3$ ,  $Q : x \mapsto 3 + x + 3x^2 + x^3$  et  $R : x \mapsto 3 - 7x - x^2 + x^3$  de  $\mathbb{R}_3[x]$ . Déterminer une base du sous-espace vectoriel  $F = \text{Vect}(P, Q, R)$  de  $\mathbb{R}_3[x]$ .

**Exercice 7.** On considère les trois matrices  $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $(R, S, T)$  est une famille libre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 8.** On considère l'ensemble  $E$  des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de la forme  $\begin{pmatrix} 2a + b & 3b - 5c & a \\ -b & a + b - c & a - 2c \\ c & b + c & 2b - c \end{pmatrix}$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et en donner une base.

**Exercice 9.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 \neq 0$  et  $A^3 = 0$ , et  $F = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$ . Montrer que la famille  $(I_3, A, A^2)$  est une base de  $F$ .

**Exercice 10.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Supposons ici  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer une base de  $F$ .

**Exercice 11.** Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[x]$  et en donner une base.

**Exercice 12.** Montrer que  $(x^n, x^{n-1}(1-x), x^{n-2}(1-x)^2, \dots, (1-x)^n)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}[x]$ .

**Exercice 13.** Soient  $u, v, w$  trois suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n, v_n = 3^n, w_n = 4^n$$

Montrer que  $(u, v, w)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Exercice 14.** Soient les fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$f_1(x) = \ln x \quad f_2(x) = e^x \quad f_3(x) = x \quad f_4(x) = e^{x+3} \quad f_5(x) = \frac{1}{x} \quad f_6(x) = \ln(x^2)$$

Déterminer une base de  $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ .

**Exercice 15.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $g_k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g_k(x) = e^{kx}$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(g_0, \dots, g_n)$  est libre.

SOMMES, SOMMES DIRECTES ET SUPPLÉMENTAIRES

**Exercice 16.** Soient  $F, G$  et  $H$  trois sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que

$$F \subset G \implies F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

**Exercice 17.** Soient  $a$  et  $b$  deux scalaires distincts de  $\mathbb{R}$ . On considère les parties  $E_a$  et  $E_b$  de  $\mathbb{R}[x]$  définies par :

$$E_a = \left\{ P \in \mathbb{R}[x] \mid \exists Q \in \mathbb{R}[x], P = (x-a)Q \right\} \quad \text{et} \quad E_b = \left\{ P \in \mathbb{R}[x] \mid \exists Q \in \mathbb{R}[x], P = (x-b)Q \right\}$$

1. Montrer que  $E_a$  et  $E_b$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}[x]$ .
2. Montrer qu'il existe  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} : c(x-a) + d(x-b) = 1$ .
3. En déduire que  $\mathbb{R}[x] = E_a + E_b$ . La somme est-elle directe ?
4. Montrer que  $E_a$  et  $\mathbb{R}_0[x]$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}[x]$ .

**Exercice 18.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $F = \{x^{n+1}A \mid A \in \mathbb{R}[x]\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[x]$ .
2. Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}[x]$ .

**Exercice 19.** On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  paires et  $\mathcal{I}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  impaires.

Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 20.** Soient  $E$  l'ensemble des suites réelles convergentes,  $F$  l'ensemble des suites convergent vers 0 et  $G$  l'ensemble des suites constantes.

Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 21.** Soient  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $F$  l'ensemble des fonctions constantes de  $E$  et  $G$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $E$  vérifiant  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ .

Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ .