Devoir maison 7

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$\mathcal{A}_\lambda = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \;\middle|\; f \circ f = \lambda f \right\}$$

1. **Premier exemple.**
Soit l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+y+z \;,\; -6x+4y+2z \;,\; 3x-y+z) \end{array}$$

   (a) Déterminer un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f \in \mathcal{A}_\lambda$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
   (d) Le vecteur $(7,6,5)$ appartient-il à $\mathrm{Im}\,(f)$?

2. **Deuxième exemple.**
Soit l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \;,\; y \;,\; \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z) \end{array}$$

   (a) Déterminer un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $g \in \mathcal{A}_\lambda$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$.
   (c) Décrire $\mathrm{Im}\,(g)$ sous la forme d'une équation linéaire.
   (d) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Vect}\Big(\;(1,1,1)\;\Big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (e) Déterminer l'expression de la projection sur $\mathrm{Im}\,(g)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\Big(\;(1,1,1)\;\Big)$.

3. **Etude générale.**
Dans cette partie, on considère $f \in \mathcal{A}_\lambda$, où λ est un réel non nul.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}\, f$.
   (d) Est-ce possible de choisir $\alpha \in \mathbb{R}^*$ de sorte que l'application αf soit un projecteur ?