

## Devoir surveillé 7 (interrogation écrite)

Jeudi 29 janvier 2026

Durée : 1h

**Exercice 1.** Calculer  $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}}$  à l'aide du changement de variable  $u = \ln t$ .

**Exercice 2.**

1. Calculer  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ .

2. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ .

3. Montrer :  $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4. En déduire :  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$

**Exercice 3.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Supposons ici  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer une base de  $F$ .

## Devoir surveillé 7 (interrogation écrite)

Jeudi 29 janvier 2026

Durée : 1h

**Exercice 1.** Calculer  $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}}$  à l'aide du changement de variable  $u = \ln t$ .

**Exercice 2.**

1. Calculer  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ .

2. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ .

3. Montrer :  $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4. En déduire :  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$

**Exercice 3.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Supposons ici  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer une base de  $F$ .