

Devoir surveillé 8

Samedi 14 février 2026

Durée : 3h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être encadrés. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

Le sujet comporte 2 page(s).

Exercice 1.

Pour toute matrice M élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note tM la matrice transposée de M .

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + {}^tM$.

On note 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et id l'identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 (b) Déterminer une base du noyau de φ .
 (c) Déterminer une base de l'image de φ .
2. (a) Montrer que $\varphi^2 - 2\varphi = 0$.
 (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer φ^n en fonction de φ et de n .
 (c) Montrer que : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi - 2\text{id})$

Exercice 2.

Les parties A et B sont indépendantes, mais sont utilisées par la partie C.

Partie A.

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $g_a(t) = t^a$.

1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur \mathbb{R}_+). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ pour $a \geq 1$.

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a, b) = \int_0^1 g_a(t) g_b(1-t) dt$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a, b)$. Montrer $I(a, b) = I(b, a)$.

On écrira abusivement $I(a, b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b dt$.

3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Montrer entre $\frac{I(a+1, b)}{a+1} = \frac{I(a, b+1)}{b+1}$.
4. Calculer $I(a, 0)$. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a

$$I(a, n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}$$

5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p, q)$ à l'aide de factorielles.
6. A l'aide du changement de variable $u = \sin^2 \theta$, en déduire la valeur de l'intégrale

$$J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} d\theta$$

où p et q sont deux entiers naturels.

Partie B.

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ln \left(1 - \frac{a}{x} \right)$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f_a .

On note \mathcal{C}_a la courbe représentant la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a, +\infty[$.

2. Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement

$$\frac{a}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-a) \leq \frac{a}{x-a}$$

3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe \mathcal{C}_a .

4. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par $y_n = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$.

Etudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n) .

Partie C.

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n , on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x du$$

1. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x, n)$.
2. En utilisant les résultats de la partie B, montrer que, pour tout x fixé, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. On fixe $x \geq 0$.
 - (a) Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad u \geq U \implies e^{-u} \leq \frac{1}{u^{x+2}}$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}$$

- (c) Montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x , on pose $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$.

4. Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x+1) = (x+1)F(x)$$

En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.