

## Dérivées successives

### ALGÈBRE : CAS DES POLYNÔMES

**Exercice 1.** Quel est la multiplicité de la racine 1 du polynôme  $x \mapsto nx^{n+2} - (n+2)x^n + (n+2)x - n$  ( $n \geq 1$ ) ?

**Exercice 2.** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , le polynôme  $P_n : x \mapsto 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  n'a pas de racine multiple.

**Exercice 3.** Montrer que :

1.  $(x-1)^2$  divise  $x^{n+1} - x^n - x + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
2.  $(x-1)^2$  divise  $\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^2 - n^2 x^{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).

**Exercice 4.** Déterminer les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[x]$  tels que 
$$\begin{cases} \deg(P) = 6 \\ (x-1)^3 \text{ divise } P(x) + 1 \\ x^4 \text{ divise } P(x) + 2 \end{cases}$$

(Indication : chercher d'abord  $P'$ .)

**Exercice 5.**

1. Soit un polynôme  $P \in \mathbb{R}[x]$  de degré au moins égal à 2 vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)P''(x) - 6P(x) = 0$ .  
Quel est le terme dominant de  $x \mapsto (x^2 + 1)P''(x) - 6P(x)$  ? Que déduire du degré de  $P$  ?
2. En déduire tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[x]$  vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)P''(x) - 6P(x) = 0$ .

### ANALYSE : CAS DES FONCTIONS

#### DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

**Exercice 6.** Quelle est la classe de la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  ?

**Exercice 7.** Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ .
3. En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 8.** Justifier que chacune des fonctions suivantes est dérivable  $n$  fois puis en donner la dérivée  $n$ -ième ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ).

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>x \mapsto \frac{1}{x}</math></li> <li>2. <math>x \mapsto \ln(x)</math></li> <li>3. <math>x \mapsto \sin x</math></li> <li>4. <math>x \mapsto \cos x</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math>x \mapsto \sin(ax + b)</math> où <math>(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2</math></li> <li>6. <math>x \mapsto x^2 e^x</math></li> <li>7. <math>x \mapsto (1+x)^n x^2</math></li> </ol> |
|---|--|

**Exercice 9.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et la fonction  $f_n : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$  définie sur  $]0, +\infty[$ . Montrer que  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $]0, +\infty[$  et déterminer  $f_n^{(n)}$ .

FONCTION RÉCIPROQUE

**Exercice 10.** Soit la fonction  $f : x \mapsto x^3 + x$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  admet une réciproque  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et exprimer  $g'$  en fonction  $g$ .
2. Quelle est la classe de  $g$ ?

THÉORÈME DE ROLLE ET THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

**Exercice 11.** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et deux fois dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose qu'il existe trois points de la courbe de  $f$  alignés.

Montrer que  $f''$  s'annule au moins une fois sur  $]a, b[$ .

(Ind. : si  $x < y < z$  sont les abscisses des trois points alignés, comparer  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$  et  $\frac{f(z) - f(y)}{z - y}$ .)

DES INÉGALITÉS

**Exercice 12.** Montrer les inégalités suivantes :

1.  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $2x < \sin 2x + \tan x$
2.  $\forall x \in ]-\pi, \pi[$ ,  $\ln(1 + \cos x) \leq \ln 2 - \frac{1}{4}x^2$
3.  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x + \frac{x}{12\pi}(\pi^2 - 4x^2)$
4.  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x$

FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL ET INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE

**Exercice 13.** Montrer que :  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ .

**Exercice 14.** Montrer que :  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\tan x \geq x + \frac{x^3}{3}$ .

**Exercice 15.** Grâce à la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction  $t \mapsto \ln t$ , montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$