Devoir maison 9

Pour jeudi 2 avril 2026

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $u_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2}$. On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme.

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln(n)$.

On rappelle que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n - w_{n+1} \geqslant 0$.
   (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.
   (c) En déduire que, au voisinage de $+\infty$: $w_n - w_{n+1} = \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. (a) Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.
   (b) En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge.
4. (a) Déterminer des réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}$.
5. En utilisant la convergence de la suite (w_n), calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln 2$.