

Devoir surveillé 9 (interrogation écrite)

Jeudi 12 mars 2026

Durée : 1h

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.
3. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x strictement positif, on pose $f_n(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$.

On pose $g_n(x) = f_n^{(n)}(x)$ pour tout x strictement positif et tout $n \geq 1$.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, justifier l'existence de g_n et le fait que g_n est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer : $\forall n \geq 1, \forall x > 0, g_{n+1}(x) = xg'_n(x) + (n+1)g_n(x)$
3. Montrer : $\forall n \geq 1, \forall x > 0, g_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$

Devoir surveillé 9 (interrogation écrite)

Jeudi 12 mars 2026

Durée : 1h

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.
3. En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x strictement positif, on pose $f_n(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$.

On pose $g_n(x) = f_n^{(n)}(x)$ pour tout x strictement positif et tout $n \geq 1$.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, justifier l'existence de g_n et le fait que g_n est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer : $\forall n \geq 1, \forall x > 0, g_{n+1}(x) = xg'_n(x) + (n+1)g_n(x)$
3. Montrer : $\forall n \geq 1, \forall x > 0, g_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$