Devoir surveillé 10

Samedi 28 mars 2026
Durée : 4h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*
Le sujet comporte 2 page(s).

Exercice 1.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, \mathrm{d}x$$

1. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I_n = J_n$ pour tout entier naturel n.
2. *Convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.*
   Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
3. *Calcul des intégrales I_{2p} et I_{2p+1}.*
   (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   (c) En déduire des expressions de I_{2p} et I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.
4. *Un équivalent de I_n.*
   (a) Justifier que, pour tout $n \geqslant 0$, $I_n > 0$. Montrer ensuite qu'on a $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.
   (b) Montrer que $(n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, pour tout $n \geqslant 0$.
   (c) Déduire, de tout ce qui précède, que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \sin t}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et que $f'(x) = \dfrac{2\sin(x)(1-\cos(x))}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
5. On note h la fonction définie sur $[0,2]$ par $h(0) = 0$ et $h(t) = \dfrac{t - \sin t}{2t(t+\sin t)}$ pour tout $t \in]0,2]$.
   (a) Montrer que h est continue sur $[0,2]$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in]0,1],\ f(x) = \dfrac{\ln 2}{2} + \displaystyle\int_x^{2x} h(t)\,\mathrm{d}t$
   (c) En déduire que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Dans la suite, on note encore f la fonction ainsi prolongée.
6. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(0)$.

Exercice 3.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!} \end{array} \qquad \text{et} \qquad L_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x f_n^{(n)}(x) \end{array}$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

1. (a) Calculer $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
2. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$
   (b) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \dfrac{x}{n+1} f_n(x)$
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$
   (c) Etablir :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que α est une racine multiple non nulle de L_n.
   (a) Montrer que $L''_n(\alpha) = 0$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ L_n^{(k)}(\alpha) = 0$.
   (c) En déduire que L_n n'a que des racines simples.

Exercice 4.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$ pour tout entier naturel n.
On admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel α et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ecrire un script Python qui demande à l'utilisateur un réel strictement positif ε, puis calcule et affiche une valeur approchée de α à ε près.