

Développements limités

CALCULS

Exercice 1. Déterminer le DL à l'ordre n en a des fonctions suivantes :

1. $a = 0, n = 7, f(x) = \ln(1 - x^2)$

2. $a = 0, n = 6, f(x) = \frac{\sin x}{x}$

3. $a = 0, n = 2, f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

4. $a = 0, n = 3, f(x) = \sqrt{4+x}$

5. $a = 0, n = 15, f(x) = 81(x^2 + \cos x + \sin x - e^x)^4$

6. $a = +\infty, n = 2, f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

DL À L'ORDRE 1 D'UNE FONCTION RÉCIPROQUE

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2 \tan(x) - x$. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , puis montrer que f^{-1} possède un développement limité à l'ordre 1 en 0 et le déterminer.

APPLICATIONS

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$.

Exercice 4. Déterminer un équivalent simple de $(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x$ en 0.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{1 - \cos x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - \sqrt{1+x} - \frac{1}{2} \ln(1+x))}{1 - \cos x - \frac{x}{2} \sin x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)^{x^2}$

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Déterminer la tangente en 0 de la courbe de f . Etudier la position de la courbe par rapport à la tangente.
2. Etudier la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 7. Etudier les branches infinies de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 8. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple de réels (a, b) pour que la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x) + a(e^x - 1) + b \sin x}{x^3}$ admette une limite finie en 0.

Exercice 9. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x - x \sin x}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. On note encore f ce prolongement. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?