

Extrema et convexité

Exercice 1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^4 sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = 0$ et $f^{(4)}(x_0) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en x_0 .

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x(\ln x)^2$. Etudier la continuité de f (et l'existence d'un prolongement par continuité en 0), sa dérivabilité, dresser son tableau de variation, étudier sa concavité et tracer sa courbe représentative.

Exercice 3. Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$$

1. Etudier les variations de f sur \mathbb{R} , ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Dresser le tableau de variations de f . Préciser les branches infinies de la courbe représentative \mathcal{C}_f de f .
2. Etudier la concavité de la courbe représentative \mathcal{C}_f de f . Préciser les éventuels points d'inflexion.
3. (a) Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre?
(b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.
4. Donner l'équation de la tangente en 0 à \mathcal{C}_f . Etudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à cette tangente au voisinage de 0. Quel résultat retrouve-t-on?

Exercice 4. En utilisant des arguments de convexité, montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$
3. $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leq \ln \frac{x+y}{2}$

Exercice 5. Moyennes harmonique, arithmétique et géométrique

Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n$, on a

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Exercice 6. Inégalités de Hölder et de Minkowski

1. Soient x et y deux réels strictement positifs, p et q deux réels strictement supérieurs à 1 vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Montrer que :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs.

En appliquant la question précédente aux réels $x_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $y_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs. Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Ind. : on pourra écrire $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$.)

Exercice 7. Soient I un intervalle d'intérieur non vide et f une fonction continue, convexe et strictement décroissante sur I . Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est convexe sur $f(I)$. Que peut-on dire si f est continue, convexe, strictement croissante ?