

Séries numériques réelles

NATURE DE SÉRIES

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de terme général

- | | | | |
|------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---|
| (a) $\frac{(-1)^{n!}}{n}$ | (d) $\frac{1}{n^2 + \ln n}$ | (g) $\frac{\ln n}{n^2}$ | (j) $n^3 e^{-n}$ |
| (b) $\frac{n+1}{n^2}$ | (e) $\frac{1}{n^2 \sqrt{n} + e^{-n}}$ | (h) $\frac{\sin(\pi \sqrt{n})}{n^2}$ | (k) $P(n)e^{-n}$ où $P \in \mathbb{R}[x]$ |
| (c) $\frac{1}{n - \sqrt{n}}$ | (f) $\frac{\ln n}{n}$ | (i) $\frac{n+5}{2n+7}$ | (l) $\left(\frac{n+3}{4n-1}\right)^n$ |

Exercice 2. Déterminer la nature des séries de terme général

- | | |
|--|---|
| (a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ | (b) $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ |
|--|---|

Exercice 3. Déterminer la nature des séries de terme général

- | | |
|--|--|
| (a) $\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) | (b) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) |
|--|--|

Exercice 4. Critère spécial des séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante de limite nulle. On considère la série $\sum (-1)^n a_n$ et on note S_n sa n -ième somme partielle.

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes puis en déduire que $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Exercice 5. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. Montrer que, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.
2. Montrer que, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

NATURE ET SOMME DE SÉRIES

Exercice 6. Montrer la convergence des séries suivantes de terme général u_n et en calculer la somme :

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$ ($n \geq 2$) (Chercher des réels a et b tels que $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n-1}$.) | (Chercher des réels a, b et c tels que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.) | (e) $u_n = \frac{n^2 + 3n}{2^n}$ ($n \geq 0$) |
| (b) $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ($n \geq 1$) | (c) $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ($n \geq 2$) | (f) $u_n = \frac{n^2 + 2^n}{n!}$ ($n \geq 0$) |
| | (d) $u_n = \frac{n-1}{3^{n+1}}$ ($n \geq 0$) | (g) $u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n!} 5^n$ ($n \geq 0$) |

Exercice 7. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ ($n \geq 0$) converge et déterminer sa somme.

Exercice 8. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ et $b_n = \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.
2. Calculer leur somme.

SÉRIES ET SUITES

Exercice 9. Constante d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

1. Montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
2. En déduire qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 10.

1. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
2. En déduire la nature de la suite de terme général $x_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. (On pourra considérer $\ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$.)

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers 0.
2. Démontrer que $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Démontrer que la série de terme général $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est divergente.
4. En déduire la nature de $\sum u_n$.

PETIT PROBLÈME

Exercice 12.

Question préliminaire :

La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi (on montrera qu'il existe un entier naturel N tel que : si $n \geq N$, alors $x_n^2 \leq x_n$).

On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch , définie par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, et d'autre part, la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\text{ch}(u_n)} \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Etudier la fonction ch et dresser son tableau de variation.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
(b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. On pose, pour tout n élément de \mathbb{N} : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
(a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
(b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
(c) Pour tout n de \mathbb{N}^* , simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n est divergente.
5. (a) Montrer que : $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$.
(b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.
(c) En utilisant le préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme général u_n .