

Espaces probabilisés

Exercice 1.

- Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et A_1, \dots, A_n des événements d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Montrer que :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) telle que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Exercice 2.

- Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $P(\{n\}) = a \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Dans ce cas, déterminer la probabilité de l'événement A : «l'entier est pair».

Exercice 3. Montrer qu'il existe une unique probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $P(\{n+2\}) = \frac{7}{2}P(\{n+1\}) - \frac{3}{2}P(\{n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Un joueur dispose d'une infinité d'urnes numérotées par les entiers naturels non nuls. L'urne numéro $n \geq 1$ peut être choisie avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$. Elle contient 1 boule blanche et $2^n - 1$ boules noires.

Le joueur choisit une urne et tire une boule au hasard dans celle-ci : quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?

Exercice 5. On réalise une suite infinie de lancers d'une pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i l'événement « on obtient FACE au i -ème lancer ».

- Quelle est la probabilité de l'événement A_n : « on obtient FACE au n -ième lancer et ce pour la première fois » ?
- Quelle est la probabilité de l'événement J : « on n'obtient jamais FACE » ?

Exercice 6. On réalise une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement «on obtient pile au n -ième lancer», F_n l'événement «on obtient face au n -ième lancer», et A_n l'événement «on obtient au

moins une fois la séquence pile-pile-face au cours des n premiers lancers».

- Déterminer $P(A_1)$, $P(A_2)$ et $P(A_3)$.
- Soit $n \geq 1$.
 - Montrer que $A_{n+3} = A_{n+2} \cup (\overline{A_n} \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3})$.
 - En déduire $P(A_{n+3}) = P(A_{n+2}) + \frac{1}{8}(1 - P(A_n))$.
- Sans chercher à calculer $P(A_n)$, montrer que la suite $(P(A_n))_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
- En déduire $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$.

Exercice 7. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne selon le protocole suivant :

- si la boule blanche est tirée, on s'arrête ;
- si une boule noire est tirée, elle est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, autant de boules noires que l'urne contient de boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n l'événement «avoir une boule noire au n -ième tirage» et A_n l'événement «n'avoir que des boules noires au cours des n premiers tirages».

- Quelle est la composition de l'urne lors du n -ième tirage (s'il a lieu) ?
- Montrer que $P(A_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $\ln(P(A_n))$ tend vers un réel strictement négatif lorsque n tend vers $+\infty$.
- En déduire que $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \in]0, 1[$.
- En déduire que la probabilité que la succession de tirages s'arrête n'est pas égale à 1.

Exercice 8. On considère deux urnes :

- une urne verte contenant 1 boule rouge et 3 boules vertes,
- une urne rouge contenant 2 boules rouges et 2 boules vertes.

On effectue une suite de tirages d'une boule, avec remise de la boule dans l'urne d'où elle vient, de la façon suivante :

- le premier tirage est effectué dans l'urne verte,
- pour $k \geq 2$, le k -ième tirage est effectué dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au $(k-1)$ -ième tirage.

Pour tout entier n non nul, on note V_n l'événement «obtenir une boule verte lors du n -ième tirage», v_n la probabilité de V_n et R_n l'événement «obtenir une boule rouge lors du n -ième tirage».

1. Les trois premiers tirages.

Déterminer la probabilité des événements

- (a) A : «on tire la première boule verte au troisième tirage»,
- (b) B : «on tire la première boule rouge au troisième tirage»,
- (c) C : «on tire au moins une boule verte dans les trois premiers tirages»,
- (d) D : «on tire une seule boule rouge lors des trois premiers tirages».

2. Les deux premiers tirages.

On a obtenu une boule verte au second tirage. Quelle est la probabilité que le premier tirage ait donné une boule rouge ?

3. Le n -ième tirage.

- (a) Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n .
- (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. La première boule rouge et la première boule verte.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient X_n l'événement «la première boule rouge apparaît au tirage numéro n » et Y_n l'événement «la première boule verte apparaît au tirage numéro n ».

- (a) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $P(X_n)$ et $P(Y_n)$.
- (b) Justifier la convergence de la série de terme général $nP(X_n)$ et en déterminer la somme.
- (c) Montrer que l'on tire presque sûrement une boule verte au cours de la suite de tirages.

Exercice 9. Deux joueurs A et B jouent avec un dé parfaitement équilibré. Le joueur A commence et lance le dé une fois : s'il obtient 1 ou 2, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon, le joueur B lance le dé une fois : s'il obtient 3, 4 ou 5, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon, c'est à A de lancer le dé...

On définit les événements :

- A_{2n+1} : «A gagne au $(2n+1)$ -ième lancer» ($n \in \mathbb{N}$),
- B_{2n+2} : «B gagne au $(2n+2)$ -ième lancer» ($n \in \mathbb{N}$),
- G_A : «A gagne la partie»,
- G_B : «B gagne la partie».

1. Calculer $P(A_{2n+1})$ et $P(B_{2n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $P(G_A)$ et $P(G_B)$.
3. Quelle est la probabilité que la partie ne s'arrête jamais ?

Exercice 10. Deux pièces de monnaie numérotées 1 et 2 amènent PILE avec les probabilités respectives p_1 et p_2 , et FACE avec les probabilités respectives $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$. On suppose $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$.

Au départ, on choisit une des deux pièces au hasard puis on joue le premier lancer avec la pièce choisie :

- si le résultat est PILE, on joue le lancer suivant avec la même pièce,
- si le résultat est FACE, on change de pièce pour le lancer suivant.

On recommence ce processus et on joue une suite de lancers.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- A_n l'événement «on joue le n -ième lancer avec la pièce 1»,
- P_n l'événement «on obtient PILE au n -ième lancer».

On pose $a_n = P(A_n)$ et $u_n = P(P_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer a_2 en fonction de p_1 et p_2 .
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_n en fonction de n , p_1 et p_2 .
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer u_n en fonction de a_n , p_1 et p_2 .
- (c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ en fonction de p_1 et p_2 .
3. On joue le deuxième lancer avec la pièce 1. Déterminer, en fonction de p_1 et p_2 , la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en fonction de n , p_1 et p_2 , la probabilité v_n que, pour la première fois, on joue avec la pièce 1 au n -ième lancer.
- (b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Comment interpréter ce résultat ?