Devoir surveillé 11 (interrogation écrite)

Jeudi 9 avril 2026

Durée : 1h

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne FACE avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et PILE avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.

On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux FACE de suite (c'est-à-dire lors de deux lancers consécutifs).
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note U_n l'événement «on obtient deux FACE de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1$», et on pose $u_n = \mathrm{P}(U_n)$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement «les n premiers lancers ne donnent pas deux FACE de suite et le n-ième lancer donne FACE», et B_n l'événement «les n premiers lancers ne donnent pas deux FACE de suite et le n-ième lancer donne PILE». Enfin, on pose $x_n = \mathrm{P}(A_n), y_n = \mathrm{P}(B_n)$.

1. (a) Déterminer $u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3, u_3$.
   (b) Trouver pour $n \geqslant 2$, une relation simple entre x_n et u_n.
   (c) Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer les probabilités conditionnelles :
   $$P_{A_n}(A_{n+1}), \quad P_{B_n}(A_{n+1}), \quad P_{A_n}(B_{n+1}), \quad P_{B_n}(B_{n+1})$$
   (d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations suivantes :
   $$\begin{cases} x_{n+1} = p y_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$$
2. On suppose dans cette question que $p = 1/2$.
   (a) On pose $v_n = 2^n y_n$. Déterminer une relation de récurrence entre $v_{n+1},\ v_n$ et v_{n-1}.
   (b) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de x_n puis de u_n, en fonction de n.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$ et en donner une interprétation.