Variables aléatoires réelles discrètes

Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Exercice 1. Existe-t-il un réel a tel que l'on puisse définir une variable aléatoire réelle X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, par $\mathrm{P}(X=k)=(ak+1)\mathrm{e}^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?

Espérance et moments

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathrm{P}(X=n)=\dfrac{4}{n}\mathrm{P}(X=n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance (si elles existent).

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=k)=C\frac{3k^2+3k+1}{k^3(k+1)^3}$$

où C est une constante positive.

1. Soit ζ la fonction de la variable réelle x définie par $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Préciser l'ensemble de définition de ζ.
2. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $\dfrac{3k^2+3k+1}{(k(k+1))^3}=\dfrac{a}{k^3}+\dfrac{b}{(k+1)^3}$.
   En déduire la valeur de C.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer en fonction de $\zeta(3)$.
4. Montrer que X admet une variance et la calculer en fonction de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$.

Exercice 4. Une urne contient n boules noires et b boules blanches. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire. Soient X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées avant la boule noire.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Y ? Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 5. Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue une succession de tirages selon le protocole suivant :

— si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne ;
— si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne mais on met une boule noire à la place.

On note B_i (resp. N_i) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au i-ème tirage ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Y_n comme étant égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue du n-ième tirage. On définit également la variable aléatoire Z comme étant égale au numéro du tirage après lequel, pour la première fois, l'urne ne contient plus aucune boule blanche. On convient que $Z=0$ si l'urne ne contient jamais seulement des boules noires.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(Y_n=2)$ puis $\mathrm{P}(Y_n=1)$.
   (b) En déduire la loi de Y_n.
   (c) Calculer l'espérance de Y_n.
2. (a) Déterminer la loi de Z.
   (b) La variable aléatoire Z a-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X > k) - (n+1)\mathrm{P}(X > n)$
2. On suppose que X admet une espérance.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant (n+1)\mathrm{P}(X > n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathrm{P}(X = k)$

   En déduire que la série $\sum \mathrm{P}(X > k)$ converge et que
   $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > k)$$
3. On suppose que la série $\sum \mathrm{P}(X > k)$ converge.
   Montrer que la série $\sum k\mathrm{P}(X = k)$ converge et que X admet une espérance.
4. Enoncer le théorème qui vient d'être établi.
5. Montrer de même que si X admet une variance, alors $\mathrm{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\mathrm{P}(X > k)$.

Exercice 7. Soient deux entiers b et n vérifiant $n > b \geqslant 1$. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules dont b boules blanches. On note Y la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel on obtient pour la deuxième fois une boule blanche. Si on n'obtient jamais de deuxième boule blanche alors on convient que $Y = -1$.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages exactement nécessaires pour obtenir une première boule blanche. Quelle est la loi de X ?
2. Montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \forall \ell \in [\![1, k-1]\!],\ \mathrm{P}_{[X=\ell]}(Y = k) = \left(1 - \dfrac{b}{n}\right)^{k-\ell-1} \dfrac{b}{n}$
3. Déterminer la loi de Y.
4. Justifier l'existence de l'espérance de Y et la calculer.

V.A. fonction d'une autre V.A.

Exercice 8.

1. *Question préliminaire :* pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ et $b_n = \dfrac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et calculer leur somme.
2. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit une variable aléatoire Y de la façon suivante :
   — si X prend une valeur impaire, alors Y prend la valeur 0.
   — si X prend une valeur paire, alors Y prend la valeur $\dfrac{X}{2}$.
   Trouver la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 9.

1. *Question préliminaire :* pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ et $b_n = \dfrac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et calculer leur somme.
2. Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire définie par $Y = 4\left\lfloor \dfrac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1$.
   Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 10. Soient $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que la variable aléatoire α^X admet une espérance et la calculer.