

Devoir maison 10

Exercice 1.

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc « Pile » ou « Face » avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : « on obtient Pile (resp. Face) au k -ième lancer ». Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, « Pile » puis « Face » dans cet ordre aux lancers $k - 1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, « Pile » suivi de « Pile » aux lancers $k - 1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), Y prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

L'objet de l'exercice est de calculer les espérances de X et Y et de vérifier que, contre toute attente, $E(Y) > E(X)$.

1. Calculer $P(X = 2)$.
2. (a) Ecrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k - 1)$ événements incompatibles deux à deux.
 - (b) Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
 - (c) Calculer $P(X = 0)$.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver les résultats de la question précédente par une autre méthode.
 - (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que $P_{F_1}(X = k) = P(X = k - 1)$.
 - (b) En déduire que :

$$\forall k \geq 3, P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}$$

- (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$. Déterminer u_k , puis donner la loi de X .
4. Montrer que X a une espérance, notée $E(X)$, et la calculer.
 5. (a) Montrer que (F_1, P_1P_2, P_1F_2) est un système complet d'événements.
 - (b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4 :

$$P(Y = k) = \frac{1}{2}P(Y = k - 1) + \frac{1}{4}P(Y = k - 2)$$

- (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $v_k = P(Y = k)$. Déterminer v_2 et v_3 puis montrer qu'en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}$.
- (d) Calculer v_k en fonction de k , pour tout $k \geq 0$.
- (e) En déduire la loi de Y .
- (f) Montrer que Y a une espérance, notée $E(Y)$, et la calculer.

Exercice 2.

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2, P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et la calculer.

4. Justifier que Y suit la même loi que X .

5. (a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

(b) Justifier que : $\forall n \geq 1, [X + Y = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$

(c) En déduire $P(X + Y = n)$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$.