Devoir maison 11

Pour le lundi 1er juin 2026

Exercice 1.
E désigne un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. (a) Ecrire la matrice A de f_a dans $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f_a$.
   (c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f_a$.
2. Déterminer $f_a \circ f_a$.
3. On pose $\varepsilon_1 = f_a(e_1)$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = e_3$.
   (a) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice A' de f_a dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le réel λ pour que $f_a - \lambda \mathrm{id}_E$ ne soit pas bijective.
4. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI$, I désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer sans calcul que $B(x)$ est inversible.
   (b) Calculer $(A - xI)(A + xI)$ puis écrire $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I et A.
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I et A.

Exercice 2. On considère un endomoprhisme f de $\mathbb{R}^3$ vérifiant
(i) $f \neq 0$
(ii) $f^3 + f = 0$
(iii) f n'est pas bijectif
où 0 est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$

1. On note $F = \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus F$.
   (b) Montrer que F est stable par f, c'est-à-dire que : $\forall u \in F, f(u) \in F$.
   (c) En déduire par l'absurde que $\dim(F) \neq 1$.
   (d) Déterminer alors la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$.
2. (a) Soient e_1 un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(f)$ et e_2 un vecteur non nul de F. Justifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Exprimer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.