Devoir surveillé 12

Lundi 11 mai 2026

Durée : 4h

Les calculatrices sont interdites. Les résultats des questions doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction : *les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

Le sujet comporte 3 page(s).

Les variables aléatoires considérées dans ce problème sont toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
Soit d un entier naturel supérieur ou égal 2.
Dans ce problème, on lance un dé équilibré à $d+1$ faces numérotées de 0 à d.

Les parties I, II et III sont indépendantes.

Partie I

Dans cette partie, on lance un dé équilibré à $d+1$ faces numérotées de 0 à d, jusqu'à la première apparition de la face 0. On note alors Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.
On relance alors ce même dé autant de fois que la valeur de Z et on note W la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'on a obtenu la face 0 au cours de cette nouvelle série de lancers.

1. Quelle est la loi de Z ?
2. Déterminer $\mathrm{P}_{[Z=n]}(W=k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que : $\quad \mathrm{P}(W=0) = \dfrac{d}{2d+1}, \quad \mathrm{P}(W=1) = \dfrac{(d+1)^2}{(2d+1)^2} \quad$ et $\quad \mathrm{P}(W=2) = \dfrac{d(d+1)^2}{(2d+1)^3}$
4. Les variables aléatoires Z et W sont-elles indépendantes ?

Partie II

Dans cette partie, un dé équilibré à $d+1$ faces numérotées de 0 à d est lancé indéfiniment. Les lancers sont indépendants les uns des autres.
Soit r un entier naturel non nul.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, r faces 0 consécutives et Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier lancer donnant une valeur non nulle.

5. (a) Soit x un réel de $]0,1[$. Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} x^k$.

   (b) Soit x un réel de $]0,1[$. Simplifier $(1-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{r} kx^{k-1}$ et en déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} kx^{k-1} = \frac{1-(r+1)x^r + rx^{r+1}}{(1-x)^2}$.

   (c) Rappeler la loi de Y, son espérance et sa variance.

   (d) Vérifier que $\mathrm{P}(Y>r) = \left(\dfrac{1}{d+1}\right)^r$.

6. On admet que X a une espérance et que les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant r} k\mathrm{P}_{[Y=i]}(X=k)$ convergent, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} k\mathrm{P}_{[Y>r]}(X=k) = r$.

   (b) Pour tout entier i de $[\![1,r]\!]$ et tout entier $k \geqslant r$, justifier que $\mathrm{P}_{[Y=i]}(X=k) = \mathrm{P}(X=k-i)$.

   (c) Pour tout entier i de $[\![1,r]\!]$, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} k\mathrm{P}_{[Y=i]}(X=k) = i + \mathrm{E}(X)$.

7. (a) Déduire de la question 6 que $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{r} i\mathrm{P}(Y=i)+\mathrm{E}(X)(1-\mathrm{P}(Y>r))+r\mathrm{P}(Y>r)$.

   (b) En déduire que $\mathrm{E}(X)=\dfrac{d+1}{d}\Big((d+1)^r-1\Big)$.

Partie III

Dans cette partie, pour tout entier naturel n non nul, notons U_n la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du n-ième lancer d'un dé équilibré à $d+1$ faces numérotées de 0 à d.

Pour tout entier naturel n non nul, notons $S_n=\sum_{k=1}^{n} U_k$.

8. Pour tout entier naturel n non nul, rappeler la loi de la variable aléatoire U_n et déterminer son espérance.
9. (a) Donner $S_2(\Omega)$.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel k de $S_2(\Omega)$, on a $\mathrm{P}\left(S_2=k\right)=\sum_{i=0}^{d} \mathrm{P}\left(U_1=i\right) \mathrm{P}\left(U_2=k-i\right)$.

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel k de $S_2(\Omega), \mathrm{P}\left(S_2=k\right)=\begin{cases}\dfrac{k+1}{(d+1)^2} & \text{si } 0 \leqslant k<d \\ \dfrac{2d+1-k}{(d+1)^2} & \text{si } k \geqslant d\end{cases}$

   (d) Déterminer $\mathrm{P}\left(S_2 \geqslant d\right)$.
10. Soit T la variable aléatoire égale au plus petit entier naturel n non nul tel que $S_n \geqslant d$.
    Les bibliothèques Python suivantes sont importées comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

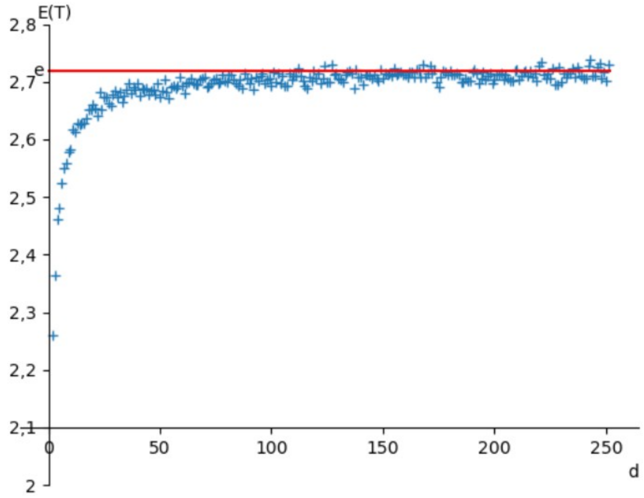
La fonction `rd.randint` de la bibliothèque `numpy.random` prend en arguments d'entrée deux entiers a et b (avec $a<b$) et renvoie une réalisation aléatoire de la loi uniforme discrète sur $[\![a, b-1]\!]$. Cette fonction pourra être utilisée dans la suite du problème.

   (a) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `Atteinte` qui prend en entrée l'entier d, simule l'expérience et renvoie le plus petit entier naturel n non nul tel que $S_n \geqslant d$.

   (b) On admet que T admet une espérance et que l'on a écrit une fonction, en langage Python, nommée `EspT`, qui prend en entrée un entier naturel d et qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de T.
   En exécutant le script suivant, on obtient la courbe ci-dessous :

```
nbv = 250
D = [i+2 for i in range(nbv)]
Esp = [EspT(d) for d in D]
plt.plot(D,Esp,'+')
plt.plot([0,2+nbv],[np.exp(1),np.exp(1)])
plt.show()
```

   Que pouvez-vous conjecturer à l'aide de cette figure ?



On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{P}(T \geqslant n) = \dfrac{\binom{n+d-2}{n-1}}{(d+1)^{n-1}}$.

11. Soit V une variable aléatoire telle que $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{P}(V \geqslant n)$ converge.

    (a) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul,
    $$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(V \geqslant n) = \sum_{i=1}^{N} i\mathrm{P}(V = i) + N\mathrm{P}(V \geqslant N+1).$$

    (b) Montrer que V admet une espérance.

    (c) Montrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} N\mathrm{P}(V \geqslant N+1) = 0$.

    (d) Montrer que $\mathrm{E}(V) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(V \geqslant n)$.

12. Soit r un entier naturel et h la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par
    $$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ h(t) = \frac{r!}{(1-t)^{r+1}}$$

    (a) Justifier que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et, pour tout entier naturel k, déterminer $h^{(k)}$, la dérivée k-ième de h.

    (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,
    $$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant 2^{r+n+1} \frac{x^n}{n}$$

    (c) Soit x un réel de $\left[0, \frac{1}{2}\right[$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (n+r) \dots (n+1) x^n$ converge et
    $$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) \dots (n+1) x^n = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

    (d) En déduire que T admet une espérance et vérifier que $\mathrm{E}(T) = \left(\dfrac{d+1}{d}\right)^d$.

    (e) Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathrm{E}(T)$ quand d tend vers $+\infty$.