Programme de khôlles n°1

Semaine du 15 septembre 2025

Raisonnements

1. Vocabulaire logique : assertion, axiome, négation, conjonction, disjonction, implication, CN, CS, réciproque, contraposée, équivalence, CNS, distributivité du et par rapport au ou, distributivité du ou par rapport au et, lois de De Morgan, négation d'une implication.
2. Quantificateurs : $\forall$, $\exists$, $\exists!$, règles de permutation des quantificateurs, négation d'une assertion avec quantificateurs.
3. Méthodes pour démontrer une assertion, une implication, une équivalence.
4. Récurrence simple, double, multiple, forte.

Note aux khôlleurs : pas de table de vérité ni d'exercice théorique de logique.

Calcul

1. Sommes et produits finis : notations $\sum$ et $\prod$, règles de calcul, changement d'indice, sommes et produits téléscopiques, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, identité géométrique $a^n - b^n = \dots$.
2. Sommes doubles de la forme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}$.
3. Vocabulaire sur l'ordre : majorant, minorant, maximum, minimum.
4. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum, toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un maximum, toute partie non vide et minorée (resp. majorée) de $\mathbb{Z}$ possède un minimum (resp. maximum).
5. Ordre dans $\mathbb{R}$: borne supérieure, inférieure, toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R}$.
6. Valeur absolue, partie entière.

Questions de cours (10 minutes maximum) :

— calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$

— Preuve des inégalités triangulaires $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$ pour tout x et y réels.

Programme de khôlles n°2

Semaine du 22 septembre 2025

Raisonnements

Voir programme 1.

Calcul

1. Programme 1.
2. Fonctions usuelles : sin, cos, tan, exp, ln, $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
3. Formulaire de trigonométrie.

Systèmes d'équations linéaires

Systèmes d'équations linéaires, systèmes échelonnés, pivot de Gauss.

Questions de cours (10 minutes maximum) :

— calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$

— Preuve des inégalités triangulaires $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$ pour tout x et y réels.

— demander à l'élève tout ce qu'il sait d'une fonction usuelle au choix (domaine de définition, parité éventuelle, périodicité éventuelle, domaine de continuité, domaine de dérivabilité, formule de la dérivée, tableau de variation avec limites et allure de la courbe).

Programme de khôlles n°3

Semaine du 29 septembre 2025

Calcul

Formulaire de trigonométrie.

Systèmes d'équations linéaires

Systèmes d'équations linéaires, systèmes échelonnés, pivot de Gauss.

Ensembles et applications

1. Les ensembles : inclusion, égalité, ensemble des parties, opérations sur les parties (complémentaire, réunion, intersection, différence), propriétés de ces opérations (dont les distributivités et les lois de De Morgan), produit cartésien d'ensembles.
2. Définition d'une application, égalité, composition, restriction, prolongement, image d'une partie.
3. Injection : définition, la composée de deux injections est une injection.
4. Surjection : définition, la composée de deux surjections est une surjection.

Note aux khôlleurs : l'image réciproque d'une partie n'est pas au programme ; **soyez indulgents sur les injections et surjections en début de semaine.**

Questions de cours (10 minutes maximum) :

— Enoncer *précisément* une définition, proposition, théorème... du cours.
— Demander à l'élève tout ce qu'il sait d'une fonction usuelle au choix (domaine de définition, parité éventuelle, périodicité éventuelle, domaine de continuité, domaine de dérivabilité, formule de la dérivée, tableau de variation avec limites et allure de la courbe).
— Preuve de : «si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective».
— Preuve de : «si $g \circ f$ est injective alors f est injective».
— Preuve de : «si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective».
— Preuve de : «si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective».

Programme de khôlles n°4

Semaine du 6 octobre 2025

Ensembles et applications

1. Les ensembles : inclusion, égalité, ensemble des parties, opérations sur les parties (complémentaire, réunion, intersection, différence), propriétés de ces opérations (dont les distributivités et les lois de De Morgan), produit cartésien d'ensembles.
2. Définition d'une application, égalité, composition, restriction, prolongement, image d'une partie.
3. Injection : définition, la composée de deux injections est une injection.
4. Surjection : définition, la composée de deux surjections est une surjection.
5. Bijection : définition, stabilité par composition, application réciproque, $f : E \longrightarrow F$ est bijective ssi il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, réciproque de f^{-1} et de $g \circ f$.

Note aux khôlleurs : l'image réciproque d'une partie n'est pas au programme.

Dénombrement <u>élémentaire</u> et coefficients binomiaux.

1. Exemples de dénombrements <u>élémentaires</u> avec des listes, listes d'éléments distincts, permutations, combinaisons.
2. Propriétés des coefficients binomiaux, formule du binôme de Newton, nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

Questions de cours (10 minutes maximum) :

— Enoncer *précisément* une définition, proposition, théorème... du cours.
— Preuve de : «si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective».
— Preuve de : «si $g \circ f$ est injective alors f est injective».
— Preuve de : «si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective».
— Preuve de : «si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective».
— Preuve de la formule du binôme de Newton.
— Preuve de : tout ensemble à n éléments possède 2^n parties.
— Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Programme de khôlles n°5

Semaine du 13 octobre 2025

Dénombrement <u>élémentaire</u> et coefficients binomiaux.
Voir programme 4.

Suites numériques réelles

1. Définition, majoration, minoration, monotonie.
2. Suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (le cas où l'équation caractéristique n'a aucune solution réelle est hors-programme).
3. Comportement asymptotique d'une suite :
   (a) Limites finies, suites convergentes : définition, propriétés (dont «(u_n) converge vers ℓ ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ»).
   (b) Limites infinies : définitions, toute suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est minorée (resp. majorée).
   (c) Limites et relation d'ordre : si $u_n \longrightarrow \ell$ et $\ell < M$ (resp. $\ell > m$) alors $u_n < M$ (resp. $u_n > m$) à partir d'un certain rang, passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'existence de limite par comparaison (gendarmes...).
   (d) Limites de λu_n, de la somme, du produit, de l'inverse, du quotient.
   (e) Croissance comparée : comparaison des suites $n!$, n^a, q^n et $(\ln n)^b$.
4. Théorème de la limite monotone et théorème des suites adjacentes.

Note aux khôlleurs : **pas encore de suites définies implicitement.**

Questions de cours (10-15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **<u>au moins deux</u>** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de la formule du binôme de Newton.
   — Preuve de : tout ensemble à n éléments possède 2^n parties.
   — Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.
   — Preuve de : «toute suite réelle croissante et majorée converge.»
   — Preuve de : «toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.»
   — Preuve de : «deux suites réelles adjacentes convergent et ont la même limite.»

Programme de khôlles n°6

Semaine du 3 novembre 2025

Suites numériques réelles
Voir programme 5.

Calcul matriciel.

1. Egalité, addition, multiplication par λ, produit, transposition, puissance k-ième, binôme de Newton, identité géométrique ($A^n - B^n = ...$).

Questions de cours (10-15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **<u>au moins deux</u>** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : «toute suite réelle croissante et majorée converge.»
   — Preuve de : «toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.»
   — Preuve de : «deux suites réelles adjacentes convergent et ont la même limite.»
   — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Programme de khôlles n°7

Semaine du 10 novembre 2025

Calcul matriciel.

1. Egalité, addition, multiplication par λ, produit, transposition, puissance k-ième, binôme de Newton, identité géométrique ($A^n - B^n = ...$).
2. Matrices carrées inversibles, théorème : si $AB = I$ alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.
3. Détermination pratique de l'inverse : pour les matrices 2×2, pour les matrices diagonales, à l'aide d'un polynôme annulateur à terme constant non nul, par résolution d'un système, par pivot de Gauss sur la matrice et l'identité en parallèle.
4. Caractérisation des matrices triangulaires inversibles.

Probabilités sur un <u>univers fini</u>.

1. Expérience aléatoire, univers (fini), espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, événements et opérations ensemblistes, système complet d'événements.
2. Espace probabilisé fini : probabilité sur un univers fini, propriétés (dont formules donnant $\mathrm{P}(A \cup B)$ et $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$), caractérisation d'une probabilité sur un univers fini, probabilité uniforme.
3. Probabilités conditionnelles : définition, propriétés, formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.

Note aux khôlleurs : soyez indulgents sur les probas en début de semaine.

Questions de cours (10-15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **<u>au moins deux</u>** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   - Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Preuve de l'unicité de l'inverse + preuve de «si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$».
   - Preuve de la formule des probabilités composées.

Programme de khôlles n°8

Semaine du 17 novembre 2025

Calcul matriciel.

Voir programme 7.

Probabilités sur un <u>univers fini</u>.

1. Expérience aléatoire, univers (fini), espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, événements et opérations ensemblistes, système complet d'événements.
2. Espace probabilisé fini : probabilité sur un univers fini, propriétés (dont formules donnant $\mathrm{P}(A \cup B)$ et $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$), caractérisation d'une probabilité sur un univers fini, probabilité uniforme.
3. Probabilités conditionnelles : définition, propriétés, formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.
4. Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de n événements.

Questions de cours (10-15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **<u>au moins deux</u>** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   - Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Preuve de l'unicité de l'inverse + preuve de «si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$».
   - Preuve de la formule des probabilités composées.

Programme de khôlles n°9

Semaine du 24 novembre 2025

Fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Définition d'une fonction polynomiale, identification des coefficients, degré, degrés de λP, de $P+Q$, de PQ, de $P \circ Q$, de la fonction polynomiale dérivée, intégrité.
2. Division euclidienne.
3. Racines : racines simples, multiples, si P a des racines distinctes $a_1, \dots, a_r$ de multiplicités respectives $k_1, \dots, k_r$ alors $(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_r)^{k_r}$ divise P, une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $n+1$ racines distinctes est nulle.
4. Factorisation : polynômes irréductibles, cas du trinôme du second degré, pratique de la factorisation de fonctions polynomiales.

NOTES AUX KHÔLLEURS :

- pour les élèves, polynôme = fonction polynomiale,
- l'ensemble des fonctions polynomiales est noté $\mathbb{R}[x]$,
- la notation $\mathbb{R}[X]$ n'a pas lieu d'être vis à vis du programme (donc pas de X, que des x),
- la dérivée n-ième d'une fonction polynôme sera vue au semestre 2,
- aucun critère donnant la multiplicité des racines grâce à la dérivation n'a été vu (ce sera au semestre 2).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   - Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de x^n par $(x-1)^2$, où $n \geqslant 2$.
   - Factoriser $x \longmapsto x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
   - Factoriser $x \longmapsto x^6 - 3x^2 - 2$.

Programme de khôlles n°10

Semaine du 1er décembre 2025

Fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Voir programme 9.

Variables aléatoires réelles définies sur un univers fini

1. Généralités : définition, SCE associé, loi d'une VAR sur un univers fini, loi de $Y = g(X)$.
2. Définitions de : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
3. Espérance : définition, positivité, cas $\mathrm{E}(X) = 0$ lorsque $X \geqslant 0$, $\mathrm{E}(aX+b)$, linéarité, croissance, théorème de transfert, espérance des lois usuelles (uniforme, Bernoulli et binomiale).
4. Variance et écart-type, cas $\mathrm{V}(X) = 0$, formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(aX+b)$ et $\sigma(aX+b)$, variance des lois usuelles (uniforme, Bernoulli et binomiale).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   - Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de x^n par $(x-1)^2$, où $n \geqslant 2$.
   - Factoriser $x \longmapsto x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
   - Factoriser $x \longmapsto x^6 - 3x^2 - 2$.
   - Calcul de l'espérance d'une loi uniforme et d'une loi de Bernoulli.
   - Calcul de l'espérance d'une loi binomiale (par le calcul, pas par linéarité de l'espérance).
   - Calcul de la variance d'une loi binomiale.

Programme de khôlles n°11

Semaine du 8 décembre 2025

Variables aléatoires réelles définies <u>sur un univers fini</u>.
Voir programme 10.

Fonctions numériques réelles.

1. Généralités sur les fonctions : ordre, parité, périodicité, monotonie, majorant et minorant d'une fonction sur I, maximum et minimum d'une fonction sur I, borne supérieure et inférieure d'une fonction sur I.
2. Limites et continuité en un point : définition de limites d'une fonction en ε, unicité de la limite, continuité en un point, prolongement par continuité, limites et continuité à droite et à gauche, limite de $f(u_n)$, limites et inégalités (passage à la limite dans une relation d'ordre, théorèmes d'existence de limites par comparaison), limites (resp. continuité) et opérations sur les fonctions (multiplication par un scalaire, somme, produit, inverse, quotient, composition), théorème de la limite monotone, croissance comparée (puissance, ln et exp), asymptote oblique.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **<u>au moins deux</u>** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Calcul de l'espérance d'une loi uniforme <u>et</u> d'une loi de Bernoulli.
   — Calcul de l'espérance d'une loi binomiale (par le calcul, pas par linéarité de l'espérance).
   — Calcul de la variance d'une loi binomiale.
   — Preuve de : la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.
   — Preuve du théorème des gendarmes (cas où $x \to a$ avec $a \in \mathbb{R}$).

Programme de khôlles n°12

Semaine du 15 décembre 2025

Fonctions numériques réelles.

1. Généralités sur les fonctions : ordre, parité, périodicité, monotonie, majorant et minorant d'une fonction sur I, maximum et minimum d'une fonction sur I, borne supérieure et inférieure d'une fonction sur I.
2. Limites et continuité en un point : définition de limites d'une fonction en ε, unicité de la limite, continuité en un point, prolongement par continuité, limites et continuité à droite et à gauche, limite de $f(u_n)$, limites et inégalités (passage à la limite dans une relation d'ordre, théorèmes d'existence de limites par comparaison), limites (resp. continuité) et opérations sur les fonctions (multiplication par un scalaire, somme, produit, inverse, quotient, composition), théorème de la limite monotone, croissance comparée (puissance, ln et exp), asymptote oblique.
3. Continuité sur un intervalle : continuité de λf, $f+g$, fg, f/g, $f \circ g$, $|f|$, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment par une fonction continue, théorème de la bijection.
4. Exemples d'études de suites définies implicitement.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **<u>au moins deux</u>** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.
   — Preuve du théorème des gendarmes (cas où $x \to a$ avec $a \in \mathbb{R}$).
   — Montrer qu'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue a au moins un point fixe.

Programme de khôlles n°13

Semaine du 5 janvier 2026

Fonctions numériques réelles
Voir programme 12.
Essentiellement sur les parties "continuité sur un intervalle" et "suites définies implicitement".

Dérivation

1. Fonction dérivable en un point et sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, dérivable à gauche (à droite) en un point, interprétation graphique, dérivation et opérations sur les fonctions, dérivabilité de la réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.
2. Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle : CN d'extremum local, théorèmes de Rolle et des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, théorème du prolongement de la dérivée, caractérisation du sens de variation avec le signe de f'.
3. Utilisation de l'IAF pour l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Note aux khôlleurs : Tout ce qui est relatif aux dérivées n-ièmes sera vu au deuxième semestre.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Montrer qu'une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue a au moins un point fixe.
   — Preuve de la CN d'extremum local (pour les élèves, c'est la proposition 2 du poly).
   — Preuve du théorème de Rolle.
   — $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ à l'aide du théorème des accroissements finis.

Programme de khôlles n°14

Semaine du 12 janvier 2026

Dérivation
Voir programme 13.

Fonction arctangente
Définition, variation, continuité, dérivabilité et formule de la dérivée, imparité, limites

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de la CN d'extremum local (pour les élèves, c'est la proposition 2 du poly).
   — Preuve du théorème de Rolle.
   — $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ à l'aide du théorème des accroissements finis.
   — Preuve de : la fonction arctangente est impaire.

Programme de khôlles n°15

Semaine du 19 janvier 2026

Fonction arctangente

Définition, variation, continuité, dérivabilité et formule de la dérivée, imparité, limites

Intégration sur un segment

1. Primitives : définition, propriétés, calcul de primitives.
2. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (par l'aire sous la courbe).
3. Théorème fondamental (fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue) et lien intégrale/primitives.
4. Propriété de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance, valeur absolue, stricte positivité.
5. Sommes de Riemann (à pas constant).
6. Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \longmapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue.
7. Intégration par parties.
8. Changement de variable (selon le programme, tout changement de variable non affine doit être indiqué).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : la fonction arctangente est impaire.
   — $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
   — Montrer que la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x)=0$ si $x\in[0,2]\setminus\{1\}$ et $f(1)=1$ n'admet pas de primitive sur $[0,2]$.

Programme de khôlles n°16

Semaine du 26 janvier 2026

Intégration sur un segment

Voir programme 15.

$\mathbb{R}$-espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels : définition, règles de calcul, exemples ($\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, suites réelles, $\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$).
2. Sous-espaces vectoriels : définition, intersection de sous-espaces vectoriels, exemples.
3. Familles finies de vecteurs : sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs, propriétés des «$\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_n)$», familles génératrices (définition et propriétés).
   Note aux khôlleurs : pas encore de familles libres et de bases.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
   — Montrer que la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x)=0$ si $x\in[0,2]\setminus\{1\}$ et $f(1)=1$ n'admet pas de primitive sur $[0,2]$.
   — Preuve de : «l'intersection de deux s.e.v. est un s.e.v.».

Programme de khôlles n°17

Semaine du 2 février 2026

$\mathbb{R}$-espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels : définition, règles de calcul, exemples ($\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, suites réelles, $\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$).
2. Sous-espaces vectoriels : définition, intersection de sous-espaces vectoriels, exemples.
3. Familles finies de vecteurs : sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs, propriétés des «$\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$», familles génératrices (définition et propriétés), familles libres et liées (définitions et propriétés), si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre alors : $(e_1, \ldots, e_n, e)$ est libre ssi $e \notin \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$. Bases.
4. Somme de 2 sous-espaces vectoriels, la concaténation de familles génératrices de F et G est génératrice de $F + G$, somme directe de 2 sous-espaces vectoriels (définition et caractérisation), la concaténation de bases de F et G (avec F et G en somme directe) est une base de $F \oplus G$, sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   - Preuve de : «l'intersection de deux s.e.v. est un s.e.v.».
   - Preuve de : «toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre».
   - Preuve de : «si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre alors : $(e_1, \ldots, e_n, e)$ est liée ssi $e \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$.»
   - Le sous-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n symétriques et celui des matrices carrées d'ordre n antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (preuve par analyse-synthèse).

Programme de khôlles n°18

Semaine du 9 février 2026

$\mathbb{R}$-espaces vectoriels

Voir programme 17.

Applications linéaires

1. Définition d'une application linéaire, opérations sur les applications linéaires, binôme de Newton et identité géométrique pour f et g qui commutent, isomorphismes (prop : f^{-1} est linéaire), noyau et image (prop : ce sont des s.e.v. de la source et du but), caractérisation de l'injectivité avec le noyau, image d'une famille finie de vecteurs par une application linéaire, l'image d'une famille génératrice est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$, l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre, caractérisation de l'injectivité (ou surjectivité ou bijectivité) à l'aide de l'image d'une base.
2. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs (application à la recherche de f^n et de f^{-1}).

Note aux khôlleurs : pas encore de projecteurs, ce sera pour la semaine de khôlles suivante.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   - Preuve de : «toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre».
   - Preuve de : «si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre alors : $(e_1, \ldots, e_n, e)$ est liée ssi $e \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$.»
   - Le sous-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n symétriques et celui des matrices carrées d'ordre n antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (preuve par analyse-synthèse).
   - Preuve de «le noyau d'une application linéaire est un s.e.v. de l'e.v. de départ».
   - Preuve de «l'image d'une application linéaire est un s.e.v. de l'e.v. d'arrivée».
   - Preuve de «f injective ssi $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$».

Programme de khôlles n°19

Semaine du 2 mars 2026

Applications linéaires

1. Définition d'une application linéaire, opérations sur les applications linéaires, binôme de Newton et identité géométrique pour f et g qui commutent, isomorphismes (prop : f^{-1} est linéaire), noyau et image (prop : ce sont des s.e.v. de la source et du but), caractérisation de l'injectivité avec le noyau, image d'une famille finie de vecteurs par une application linéaire, l'image d'une famille génératrice est génératrice de $\operatorname{Im} f$, l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre, caractérisation de l'injectivité (ou surjectivité ou bijectivité) à l'aide de l'image d'une base.
2. Polynômes d'endomorphismes et polynômes annulateurs (application à la recherche de f^n et de f^{-1}).
3. Etude des projecteurs.

Comparaison des suites et des fonctions

1. Suite négligeable devant une autre, suites équivalentes, propriétés.
2. Fonctions :
   (a) petits o (définition, propriétés, croissance comparée),
   (b) fonctions équivalentes : définition, propriétés, équivalents usuels en 0 ($\sin x,\ \tan x,\ 1-\cos x,\ \ln(1+x),\ \mathrm{e}^x-1,\ (1+x)^\alpha-1$) et leur composition à droite par une fonction u qui tend vers 0 ou par une suite (u_n) qui tend vers 0.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de «le noyau d'une application linéaire est un s.e.v. de l'e.v. de départ».
   — Preuve de «l'image d'une application linéaire est un s.e.v. de l'e.v. d'arrivée».
   — Preuve de «f injective ssi $\operatorname{Ker}(f)=\{0\}$».
   — Preuve de : «si p est un projecteur d'un espace vectoriel E alors $E=\operatorname{Ker}(p)\oplus\operatorname{Im}(p)$.»

Programme de khôlles n°20

Semaine du 9 mars 2026

Comparaison des suites et des fonctions

Voir programme 19.

Dérivations successives

1. Algèbre : cas des polynômes.
   Polynômes dérivés successifs, propriétés de la dérivation n-ième (dont formule de Leibniz), formule de Taylor pour les polynômes, critère donnant la multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés successifs.
2. Analyse : cas des fonctions.
   (a) Fonctions dérivées successives, classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$, classe d'une fonction et opérations (dont formule de Leibniz).
   (b) Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de la formule de Taylor pour les polynômes.
   — Preuve de la formule de Leibniz pour les fonctions.
   — Preuve de la formule de Taylor avec reste intégral.

Programme de khôlles n°21

Semaine du 16 mars 2026

Dérivations successives
Voir programme 20.

Développements limités

1. Définitions de DL en 0, x_0 et $\pm\infty$, DL en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, DL en 0 d'une fonction (im)paire, troncature, DL à l'ordre 0 et continuité, DL à l'ordre 1 et dérivabilité.
2. Formule de Taylor-Young, DL en 0 des fonctions usuelles ($x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, $x \longmapsto \ln(1+x)$), calculs de DL par combinaisons linéaires et produit.
3. Applications : recherches d'équivalents et calculs de limites, étude locale d'une courbe (tangente et position), étude des branches infinies.

Note aux khôlleurs : la composition et la primitivation des DL sont hors-programme en ECG.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de la formule de Taylor pour les polynômes.
   — Preuve de la formule de Leibniz pour les fonctions.
   — Preuve de la formule de Taylor avec reste intégral.

Programme de khôlles n°22

Semaine du 23 mars 2026

Développements limités
Voir programme 21.

Extrema et convexité

1. Extrema : définition d'extremum local et global, existence d'extrema globaux pour une fonction continue sur un segment, CN d'existence d'un extremum local pour une fonction C^1 sur un intervalle ouvert, point critique, CS d'existence d'un extremum local en un point critique x_0 pour une fonction C^2 sur un intervalle ouvert (selon que $f''(x_0) > 0$ ou < 0).
2. Fonctions convexes (et concaves) : définition et interprétation graphique (cordes et arcs), inégalité de convexité généralisée (ou de Jensen), caractérisation des fonctions convexes et concaves parmi les fonctions dérivables, parmi les fonctions deux fois dérivables, point d'inflexion, CS d'extremum global en un point critique d'une fonction convexe (ou concave) sur un intervalle ouvert.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi : $\varnothing$

Programme de khôlles n°23

Semaine du 30 mars 2026

Extrema et convexité
Voir programme 22.

Séries numériques réelles

1. Définitions d'une série, de la somme et du reste d'ordre N d'une série convergente, séries géométriques et ses dérivées première et seconde (convergence et somme), série exponentielle (convergence et somme), divergence grossière, série téléscopique, opérations sur les séries.
2. Séries à termes positifs : une série à termes positifs converge ssi la suite de ses sommes partielles est majorée, séries de Riemann, comparaison au moyen d'inégalités et d'équivalents.
3. Toute série absolument convergente est convergente.
4. Comparaison au moyen de petits o dans le cas où $u_n = o(v_n)$ avec les v_n positifs.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi : $\varnothing$

Programme de khôlles n°24

Semaine du 6 avril 2026

Séries numériques réelles
Voir programme 23.

Espaces probabilisés

1. Expérience aléatoire, univers, ensemble d'événements (POUR LES COLLEURS, LE MOT TRIBU EST HORS-PROGRAMME), espace probabilisable, événements et opérations ensemblistes, système complet d'événements.
2. Espace probabilisé : probabilité, propriétés (dont probabilité de la réunion de 2 ou 3 événements), caractérisation d'une probabilité sur un univers au plus dénombrable, probabilité uniforme dans le cas d'un univers fini, théorème de la limite monotone et son corollaire (voir programme officiel).
3. Probabilités conditionnelles : définition, propriétés, formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.
4. Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de n événements, d'une suite d'événements.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi : $\varnothing$

Programme de khôlles n°25

Semaine du 27 avril 2026

Espaces probabilisés

Voir programme 24.

Variables aléatoires réelles discrètes (VAR discrètes).

1. Définition d'une variable aléatoire réelle discrète, système complet d'événements associé à une VAR discrète, loi d'une VAR discrète (et caractérisation), introduction à la fonction de répartition (seulement la définition), VAR discrète fonction d'une autre VAR discrète (*i.e.* de la forme $g(X)$), VAR discrètes (mutuellement) indépendantes.
2. Définition et cadre d'utilisation des lois discrètes usuelles : certaine, uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson.
3. Espérance : définition, positivité, linéarité, croissance, existence par domination, théorème de transfert, espérance des lois usuelles du 2.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Calcul de l'espérance d'une VA suivant une loi géométrique.
   — Calcul de l'espérance d'une VA suivant une loi de Poisson.

Programme de khôlles n°26

Semaine du 4 mai 2026

Variables aléatoires réelles discrètes (VAR discrètes).

1. Définition d'une variable aléatoire réelle discrète, système complet d'événements associé à une VAR discrète, loi d'une VAR discrète (et caractérisation), introduction à la fonction de répartition (seulement la définition), VAR discrète fonction d'une autre VAR discrète (*i.e.* de la forme $g(X)$), VAR discrètes (mutuellement) indépendantes.
2. Définition et cadre d'utilisation des lois discrètes usuelles : certaine, uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson.
3. Espérance : définition, positivité, linéarité, croissance, existence par domination, théorème de transfert, espérance des lois usuelles du 2.
4. Moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, variance et écart-type, formule de Koenig-Huygens pour le calcul de la variance, variance et écart-type de $aX + b$, variable centrée réduite associée à X, variance des lois usuelles du 2..

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Calcul de l'espérance d'une VA suivant une loi géométrique.
   — Calcul de la variance d'une VA suivant une loi géométrique.
   — Calcul de l'espérance d'une VA suivant une loi de Poisson.
   — Calcul de la variance d'une VA suivant une loi de Poisson.

Programme de khôlles n°27

Semaine du 18 mai 2026

Variables aléatoires réelles discrètes.
Voir programme 26.

Espaces vectoriels et applications linéaires.
Voir programmes 17, 18 et 19.

Espaces vectoriels de dimension finie.

1. Espaces vectoriels de dimension finie, existence de bases, théorème de la base incomplète, dimension, familles libres et génératrices en dimension n, caractérisation des bases en dimension n, dimension d'un sous-espace vectoriel en dimension finie (cas d'égalité), somme, somme directe, formule de Grassman, supplémentaires (théorèmes pour établir qu'un sev est un supplémentaire à l'aide des dimensions ou avec la concaténation de bases), rang d'une famille finie de vecteurs (et propriétés).

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Calcul de l'espérance d'une VA suivant une loi géométrique.
   — Calcul de la variance d'une VA suivant une loi géométrique.
   — Calcul de l'espérance d'une VA suivant une loi de Poisson.
   — Calcul de la variance d'une VA suivant une loi de Poisson.
   — Preuve de : «tout s.e.v. d'un e.v. de dimension finie admet au moins un supplémentaire».

Programme de khôlles n°28

Semaine du 25 mai 2026

Espaces vectoriels de dimension finie.

1. Espaces vectoriels de dimension finie, existence de bases, théorème de la base incomplète, dimension, familles libres et génératrices en dimension n, caractérisation des bases en dimension n, dimension d'un sous-espace vectoriel en dimension finie (cas d'égalité), somme, somme directe, formule de Grassman, supplémentaires (théorèmes pour établir qu'un sev est un supplémentaire à l'aide des dimensions ou avec la concaténation de bases), rang d'une famille finie de vecteurs (et propriétés).
2. Applications linéaires en dimension finie : espaces vectoriels isomorphes, rang d'une application linéaire, théorème du rang, caractérisation de la bijectivité d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ lorsque $\dim E = \dim F$ finie, formes linéaires et hyperplans.

Note aux khôlleurs :
pas encore de matrices d'applications linéaires cette semaine.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : «tout s.e.v. d'un e.v. de dimension finie admet au moins un supplémentaire».
   — Preuve du théorème du rang.
   — Preuve de : «un s.e.v. est un hyperplan ssi c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle».

Programme de khôlles n°29

Semaine du 1er juin 2026

Espaces vectoriels de dimension finie.

1. Espaces vectoriels de dimension finie, existence de bases, théorème de la base incomplète, dimension, familles libres et génératrices en dimension n, caractérisation des bases en dimension n, dimension d'un sous-espace vectoriel en dimension finie (cas d'égalité), somme, somme directe, formule de Grassman, supplémentaires (théorèmes pour établir qu'un sev est un supplémentaire à l'aide des dimensions ou avec la concaténation de bases), rang d'une famille finie de vecteurs (et propriétés).
2. Applications linéaires en dimension finie : espaces vectoriels isomorphes, rang d'une application linéaire, théorème du rang, caractérisation de la bijectivité d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ lorsque $\dim E = \dim F$ finie, formes linéaires et hyperplans.
3. Matrices et applications linéaires en dimension finie : matrice d'une famille de vecteurs dans une base, matrice d'une application linéaire dans des bases, matrice de $\lambda f + \mu g$ et de $g \circ f$, isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux bases étant fixées, caractérisation matricielle de "f isomorphisme" et matrice de f^{-1}, caractérisation matricielle de "telle famille est une base".
4. Matrice de passage, formule de changement de base pour la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.
5. Rang d'une matrice : définition, relation entre les différentes notions de rang (famille de vecteurs, application linéaire, matrice), caractérisation de l'inversibilité d'une matrice avec le rang, calcul du rang d'une matrice par pivot de Gauss.
6. Polynômes de matrices, polynômes annulateurs (utilisation pour le calcul de A^{-1} et de A^n avec une division euclidienne de polynômes).

Note aux khôlleurs : attention à la notation (spécifique ECG) pour la matrice d'une application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée : $\text{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

Questions de cours (15 minutes maximum) :

1. Dans un premier temps, le colleur demande à chaque élève d'énoncer *précisément* **au moins deux** définition(s), proposition(s), théorème(s), formule(s)... du cours.
2. Puis, dans un second temps, le colleur pose une question parmi :
   — Preuve de : «tout s.e.v. d'un e.v. de dimension finie admet au moins un supplémentaire».
   — Preuve du théorème du rang.
   — Preuve de : «un s.e.v. est un hyperplan ssi c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle».